UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Influencias mutuas entre la física, la matemática y la filosofía en la historia de las geometrías no euclidianas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A :

Nicolás Gaudenzi Fernández

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Ernesto Marquina
(2010)

Para mi mamá,
con todo mi cariño

«De la pura inteligencia no brotó nunca
nada inteligible,
ni nada razonable de la razón pura»
Friedrich Hölderlin

Agradecimientos

A la UNAM.

A mi asesor, Pepe Marquina, porque ha influido en este trabajo más de lo que él imagina, desde la primera vez que yo entré a una de sus clases y me entusiasmé por el estudio de la historia y la filosofía de la ciencia.

A Concha Ruiz, que desde que la conozco ha confiado en mí y me ha apoyado incomparablemente.

A Leo Patiño, a quien considero un maestro, a pesar de nunca haber compartido un salón de clases.

A Ángeles Eraña, porque sin su intervención este trabajo estaría plagado de errores e imprecisiones filosóficas.

A mis sinodales, Alex Ruelas y José Luis Álvares, por la paciencia y la dedicación con la que leyeron este trabajo.

A todos los maestros que por fortuna tuve en mi formación y que en muchos sentidos son responsables colectivos de este trabajo: a Martín Cañas, a Leandro Chertnikof, a Javier Páez y a Jorge Hirch, entre otros.

A Pepe "Loco", porque él tiene responsabilidad en que yo quisiera estudiar física desde muy temprana edad y me ha seguido apoyando todos estos años.

A mi madre, por el cariño, el apoyo y la paciencia. A mi abuela, porque siempre ha sido un ejemplo para mí. A mi padre, porque influyó en que descubriera el gusto de escribir.

A todos los amigos que han alimentado y comentado este trabajo.
A Melina Gastelum, pues su amistad y cercanía son uno de los más gratos recuerdos que tengo de la facultad.
A Diego Hartasánchez, quien se ha convertido con el paso del tiempo en alguien de mi familia.
A Carlos A. Castañares, porque en gran medida es en nuestras conversaciones que mis ideas se hilan y toman forma de argumentos.
A mis amigos filósofos, Adrián Pascoe y a Valeria Luiselli, porqué es en gran medida gracias a ellos que mis posturas filosóficas son menos ingenuas de lo que podrían ser.
A Rodrigo Puchet, por la complicidad que dan los años.
A todos los que, de una u otra manera, hicieron posible que llegara al final de este proceso: a Pedro, con quien, a lo largo de los años he compartido los más amplios intereses; a Enrique Balp, porqué sus cuestionamientos siempre han hecho cimbrar mis creencias; a Adair, a quien debo que mis últimos años en la facultad estuvieran llenos de novedad y estímulo; a Emilio, porque su entusiasmo es contagioso; a los miembros de aquel memorable grupo de estudio: Carlo, Tania, Osvaldo, Jorge, Oscar.
Les tengo a todos un cariño entrañable.

A María José, porque su amor y solidaridad incomparables han sido indispensables a lo largo de todo este trabajo.

Índice

Introducción

I. Motivación y objetivos

De las múltiples estrategias posibles para tomar decisiones, lo que hoy llamamos ciencia destaca por una consciente preocupación por producir conocimiento objetivo[1], basado en evidencia experimental, certero, coherente y, en su versión más rígida, escrito en lenguaje matemático. Estas características que ha ido adquiriendo y promoviendo a lo largo de su historia la sitúan, en un lugar privilegiado de la visión moderna[2] del mundo. Su huella se puede sentir en la vida cotidiana, en los medios de comunicación que apelan a su nombre para validar sus mensajes como verdaderos, en el vertiginoso desarrollo tecnológico que sigue cambiando dramáticamente las comunicaciones, en la increíble fortuna que gobiernos de contextos muy distintos están dispuestos a pagar por un proyecto científico como el LHC, en la transformación que ha producido en nuestra forma de vida y en nuestro entorno, para bien o para mal. Es un modelo tan *exitoso* (en tanto produce desarrollo tecnológico innegable) que para muchísima gente, tanto público apenas informado, hasta especialistas en cualquier rama de la ciencia, el conocimiento científico actual es equivalente a lo verdadero, en el sentido de que accede a una realidad independiente y emite enunciados que son inmutables en esa realidad externa, de forma que sus métodos de validación le proporcionan un blindaje contra elementos sujetos a transformación en el tiempo, como elementos subjetivos, incidentales o culturales.[3] El conocimiento desde este punto de vista es *necesario*[4] y el descubrimiento de verdades que hoy no conocemos sólo requiere que sigamos avanzando como hasta ahora. Según esta visión claramente teleológica, si le damos a la ciencia el tiempo suficiente, llegará a todas la verdades absolutas de manera inexorable. Es una visión atractiva de la ciencia, pero a mi parecer es falsa. Me parece imposible entender cabalmente la revolución copernicana sin hacer mención de un

---

[1] Entiendo por conocimiento objetivo aquel que está validado por una comunidad epistémica pertinente en el sentido en que lo discute Villoro en “Creer, Saber, Conocer”, para distinguirlo de lo verdadero en el sentido realista del término.

[2] El término moderno se usa de forma distinta en la historia de la filosofía y en la historia de la física o en matemáticas. Entiendo por modernidad filosófica el conjunto de prejuicios ontológicos y epistemológicos que se forjaron a partir de los trabajos de Descartes, Hume, Locke y Kant entre otros. La modernidad en física y matemáticas, en cambio, se refiere a las teorías que aparecieron a finales del siglo XIX y principios del XX. El término se usa con estas connotaciones dependiendo del contexto.

[3] Esta es la versión más burda de la postura realista en el debate sobre lo que conocemos, y si bien es cierto que los que participan de ese debate han prácticamente abandonado esta versión ingenua y sin matices, lo cierto es que es todavía está vigente en el pensamiento de un amplio sector.

[4] Necesario en el sentido de que su validez no es contextual. Creemos que el Teorema de Pitágoras era verdad antes de que los pitagóricos lo enunciaran y representa un descubrimiento de una relación entre entidades geométricas que es cierto en sí mismo.

elemento tan subjetivo como la teología newtoniana, o los intereses astrológicos de Kepler; el desarrollo de la química sin el interés de la industria textil; la física nuclear sin el proyecto Manhattan.

Con esto en mente empecé a buscar un episodio histórico en el que pudiera mostrar claramente el intercambio horizontal entre teorías científicas en gestación e ideas que las circundaran en otras ámbitos de la cultura. Y despertó en mí el interés por el periodo que comprende las primeras tres décadas del siglo XX, durante las cuales creo reconocer una sacudida importante en todos los discursos intelectuales de Europa: desde las vanguardias artísticas, el nacimiento del cine y la primera teoría psicoanalítica; hasta la aparición de la relatividad especial y la teoría cuántica; pasando por el primer vuelo en avión, la primera revolución socialista, la desaparición del imperio austrohúngaro y, por supuesto, la primera guerra mundial. Es tal la convulsión en la cosmovisión europea que se me ocurre pensar que la simultaneidad de todas estas discontinuidades no es fortuito y que deben existir razones de presión histórica, elementos en común entre áreas del quehacer humano al parecer tan disconexas. Así que retrocedí un poco en el tiempo para empezar a rastrear los antecedentes de este periodo de innovación y de inmediato me pareció claro que el evento más significativo del siglo XIX, en lo que a la historia de la ciencia "dura" se refiere, fue la aparición de geometrías no euclidianas. Su estudio me pareció interesante, pues es un raro ejemplo de un importante cambio en el seno de la más célebre de las portadoras de certeza, la matemática. En el caso de la revolución copernicana, el énfasis en medir de forma precisa que encabezaron Tycho y Galileo fue crucial para detonar la crítica abierta al sistema aristotélico, pero ¿qué evidencias puede haber para cuestionar un sistema matemático veintidós siglos después de su formulación? ¿Por qué veintidós y no veintitrés o dieciséis? Como en la matemática no se trata de medir, este importantísimo cambio debía apuntar a un cambio en el ámbito de las ideas. Me pareció un ejemplo muy interesante de una revolución científica en todo el sentido de la palabra, pero en el seno de una ciencia muy extraña, por su ausencia de "experimentos". ¿Qué sucedió en el siglo XIX que logró que un descubrimiento que estuvo frente a nuestras narices durante siglos, por fin se encontrara? Así fue como surgió el presente trabajo: una investigación sobre el nacimiento de las teorías matemáticas conocidas como geometrías no euclidianas y que sugiere algunas consecuencias de su aparición en la matemática, la física y la filosofía. Como es natural, cada vez que le presentaba esta línea argumentativa como mi proyecto de tesis a distintos asesores, prácticamente todos coincidieron en que había que acotar, y como sucedió naturalmente en el momento de encarar la investigación, acoté. Las pretensiones de estudiar los rasgos comunes del cambio científico con transiciones y rupturas en áreas tan diversas como la política, el arte o el entretenimiento; pretensiones que incubaron este proyecto, pero que requieren para su estudio un espacio distinto al de una tesis, quedaron atrás y me enfoqué de manera casi exclusiva en la historia de la geometría. En las conclusiones me permito unos comentarios adicionales sobre aquella inquietud original, pero, por lo demás, ésta ha prácticamente desaparecido del trabajo final.

II. *Estructura y metodología*

El trabajo es una reconstrucción histórica de un proceso de desarrollo matemático y está casi en su totalidad organizado siguiendo la flecha del tiempo.

El primer capitulo empieza por establecer algunas características generales de la matemática griega y del contexto discursivo en el que aparece la obra central de este estudio, los *Elementos* de Euclides. Después de presentar las características más importantes del sistema de geometría euclidiano, aparece la figura de Proclus para poner lo que los guionistas llaman el detonante de esta historia: la pregunta metamatemática sobre la independencia del último de los postulados de los *Elementos*, una inquietud que tardaría mucho siglos en ser contestada.

En este punto conviene aclarar que éste no pretende ser un estudio matemático sino histórico de la geometría. Como tal, he limitado el uso de tecnicismos matemáticos a un par de apartados que son necesarios para entender algunas conexiones discursivas entre distintos trabajos. Para el lector interesado en la construcción formal del sistema euclidiano y las geometrías ulteriores un referente obligado es el libro de Bonola titulado simplemente *Geometrías no-euclidianas*.

Lo que es más, a la luz de mis lecturas fue necesario reconocer que la historia "interna" del acontecimiento matemático que me propongo reconstruir ya está suficientemente clara en trabajos previos. Puede parecer una afirmación arriesgada pero en este caso en particular hay una razón de peso para decirlo y que apunta a un elemento metodológico de la geometría misma: su historia está prácticamente en sus totalidad escrita como una cadena de comentarios anidados que empieza desde muy temprano con Poseidonio y la revisión de Proclus a los *Elementos,* y termina en el comentario de Gödel a los *Principia Mathematicae* (cuyo nombre es ya un comentario) de Russell y Whitehead. Este ejercicio es fundamental para prácticamente todos los geómetras, porque durante muchos siglos era lo único que se podía hacer en geometría, comentar las minucias y los rincones más sutiles del sistema axiomático euclidiano. Contamos con los trabajos de Saccheri y Greorg Simon Klügel del siglo XVIII, con los comentarios de Gauss y las cartas de Farkas Bolyai, con las reconstrucciones históricas de Klein y de Russell mismo, en fin, con un trabajo muy preciso de auto-revisión, practicado sistemáticamente a través de los siglos y que nos permiten una visión bastante clara de los argumentos internos del surgimiento de geometrías no euclidianas. Por ello, debo aclarar que el enfoque de este trabajo es revisar más bien, los lazos y conexiones, las influencias mutuas, entre la práctica matemática y el área de la filosofía que naturalmente la acompaña y revisa (no sé si llamarla "una epistemología" o "filosofía de la matemática"). Esta revisión me parece natural, en el entendido de que hasta hace relativamente poco, ambas actividades eran la misma y que a prácticamente todos los personajes de esta historia les preocupaba en la misma medida el resultado matemático y su interpretación.

Dicho esto, pasamos al segundo capítulo, hasta el principio de la revolución copernicana. Este capítulo tiene como objetivo establecer claramente la posición privilegiada que el sistema euclidiano poseía entre los frutos del conocimiento, tanto en el ámbito interno de la ciencia como de lo que de ella se decía en la filosofía, particularmente en la versión trascendental de Kant. Me parecía importante para entender el impacto que suponía la aparición de geometrías no euclidianas, no sólo al interior de la matemática, empezar por mostrar hasta qué punto la geometría euclidiana seducía a las mentes europeas, al punto de divinizarla, y lo extenso que era su impacto en la filosofía. De esta manera, en la división que hoy nos es cotidiana, diría que si bien el trabajo tiene su foco en la historia de las matemáticas, la física y la filosofía la irán siempre acompañando en este relato.

Busqué la pista de Euclides en los trabajos de Kepler, Galileo y Newton, que, como se pueden imaginar, no es tan difícil de encontrar. Prácticamente todos ellos confiesan abiertamente su devoción por la geometría y en ningún caso hubo una reacción de censura a este culto, pues su asociación con la divinidad era casi indiscutible. Al final del capítulo, como ya he dicho, hago una revisión muy sintética y por supuesto muy limitada, de las principales ideas que motivan a Kant a escribir un libro tan influyente como la *Crítica de la razón pura* y que, para mi sorpresa inicial, debo confesar, tienen mucho que ver con esta historia de la geometría.

El tercer capítulo está dedicado a los detalles de la aparición de las nuevas teorías, de la aparente marginalidad en la que sucedió y de su lenta pero imparable penetración en el discurso académico de la época a lo largo del siglo XIX. Como era ineludible, empieza por esclarecer la paternidad sobre las geometrías no euclidianas, intentando mostrar hasta que punto los principales involucrados tienen derecho de llamarse los creadores de estas nuevas teorías y con cuanta independencia trabajaron unos de otros. Efectivamente, la aparición de un conjunto de ideas muy parecidas en regiones prácticamente disconexas de la academia matemática parece un buen ejemplo de una de esas ideas que "flotan en el ambiente" y que finalmente florece en más de un sitio, como si su descubrimiento fuera en cierto punto de desarrollo, inevitable. Se discute con un poco más de precisión qué entendemos de forma actual por una geometría en conexión con los modelos que introducen Beltrami y Klein, entre otros, para generar una visión moderna del estudio de sistemas axiomáticos que permita entender la crisis de los fundamentos que estaría por aparecer.

Efectivamente, el último capítulo está dedicado a las repercusiones que puedo reconocer en un periodo increíblemente inestable pero indudablemente fértil y que representaba de alguna manera mi pretensión original de hablar un poco sobre el principio del siglo XX. Un periodo marcado por un intenso debate sobre el objeto de estudio de las matemáticas, así como sus posibilidades y limitaciones, en el más brutal ejercicio de introspección que la matemática haya conocido en su historia, y cuyas reflexiones serían importantes para moldear la imagen moderna de la ciencia. Sin atreverme a afirmar que la pérdida de la hegemonía del sistema euclidiano pueda ser responsabilizado por esta crisis, me parece claro que influyó en las posturas que se adoptaron en el debate e intento mostrar como esa influencia repercute en teorías que hoy consideramos pilares de nuestra profesión.

III. *Aclaraciones adicionales*

Ahora bien, el trabajo se presenta como un estudio general de la historia de la geometría y como tal era imposible entrar a profundidad en las discusiones historiográficas más detalladas, o los debates técnicos sobre cuestiones específicas. Como criterio general el trabajo cita las fuentes originales, pero, como es comprensible, no me fue posible en todos los casos. En estos cotejé por lo menos tres fuentes independientes y valoré como cierto aquello donde hay consenso. Aun así, existen algunos episodios importantes en los que a mi juicio sigue habiendo un debate abierto y en ese caso presento las alternativas en juego. En este sentido, intenté alejarme de la polémica y me permití cotejar fuentes de muy diversos ámbitos como libros, conferencias en Internet, artículos de revistas especializadas en español e inglés (en todos los casos en los que se cita la fuente directamente en inglés, la traducción es propia), páginas de Internet y entrevistas personales por correo electrónico. Digamos que mi criterio fue: si en algo estoy equivocado, espero haberme equivocado junto con muchos otros. No sé si es el mejor, pero por las pretensiones de este trabajo, me pareció suficiente y honesto.

Por último, soy de la opinión de que, del mismo modo en que la matemática y la ciencia en general requieren de un constante ejercicio de reflexión sobre su propia actividad, necesitan comunicar sus hallazgos a la comunidad más amplia posible. Por esta razón el texto se desarrolla de forma que, sin ser propiamente un trabajo de divulgación, sea accesible a un público que no tiene formación matemática profesional. Creo que aquellos que la tienen pueden sentir con mayor impacto lo que representa la historia que aquí se narra, pero puse empeño en no perder inmediatamente a lectores ajenos a los tecnicismos y procuré, las más de las veces, que la narración fuera amena, que no falta de rigor. Es una manera de decir que espero sinceramente que lo disfruten como yo disfruté escribirlo.

Capítulo Primero
El nacimiento de la geometría

1.1 Nociones previas

Aunque el principio de una historia completa de la matemática tendría que estar situado, tal vez, en los pastores contando ovejas, los primeros comerciantes registrando sus movimientos financieros, las increíbles investigaciones babilónicas sobre el paso del tiempo o la construcción de hermosos edificios y la transmisión de ese conocimiento a Egipto, yo he decidido no empezar por el principio y adelantar el reloj hasta el año 585 a.n.e., aproximadamente. Prácticamente todos los estudios sobre historia de la cultura europea reconocen como detonante principal el periodo comprendido entre el siglo VI y el siglo III a.n.e. en la Grecia Clásica y, por sus pretensiones, este trabajo no es la excepción. Antes de abrir el telón, debo hacer la misma aclaración que hacen la mayoría de los estudios antes citados: este periodo histórico es delicado, pues en la mayoría de los casos contamos con muy poca evidencia directa de los eventos y los personajes, y sus historias confunden más de una vez al mito con el hecho[5].

Por ejemplo, del personaje involucrado en el evento del año 585 a.n.e., se han dicho muchas cosas: un sabio distraído que por ir viendo el cielo se cae en un pozo[6], un ingeniero práctico y eficaz, un astrólogo; uno de los siete sabios, padre de la filosofía, o del pensamiento abstracto. El evento del 585 y que es pretexto para empezar de una vez por todas con este relato, es narrado por Plinio:

> Entre los griegos el primero de todos que investigó la causa de un eclipse fue el milesio Tales, quien predijo el eclipse de sol que se produjo durante el reinado de Aliates, en el cuarto año de la Olimpíada 48 (585 a.n.e.), año 170 desde la fundación de Roma. [7]

Al parecer en su viaje a Egipto, Tales de Mileto entró en contacto con el conocimiento babilónico y egipcio que había producido como resultado un calendario muy preciso, que tomaba en cuenta tanto las observaciones astronómicas hechas por los primeros, como las evidentes crecidas del Nilo, y lo había usado para *predecir*, siempre un acto digno de asombro.

---

[5] Esta ausencia de fuentes es notable, pues tenemos más información de periodos anteriores que de esté. Se debe principalmente a que los griegos usan papiro y no tablillas, como los babilónicos, por ejemplo.
[6] (D-K 11 A 9) Platón, Teet. 174ª, (D-K 11 A 6) Her., I 75, (D-K 11 A 10) Arist., Pol. I 11, 1259a:
[7] (D-K 11 A 5) Plinio, Hist. Nat. II 53:

Al margen de los problemas historiográficos, las distintas historias que hay alrededor de Tales de Mileto parecen subrayar que para este momento, después de muchos siglos estudiando relaciones espaciales entre objetos del mundo, la cantidad de resultados en la materia y su adecuada organización hacen posible que un solo individuo estudioso vea claramente que existen relaciones de necesidad entre ellos. Que se pueden *deducir* unos de otros.

No es que la geometría empiece con Tales, pero surge la idea de que para hacer geometría no es necesario hacer medidas (en contradicción con su nombre), sino usar el intelecto para deducir unas propiedades de otras. Según Proclus:

> Se dice que Tales fue el primero en demostrar que el círculo es dividido por el diámetro en dos partes iguales.[8]

Tales *demuestra* un hecho que parece clarísimo a todo mundo, mostrando que su interés no está en los resultados, sino en las relaciones entre ellos. Ese poderoso salto de abstracción tendrá un impacto profundo en la formación de los valores racionalistas griegos y es el origen conceptual de mi historia de la geometría.

El heredero intelectual de Tales es el famoso Pitágoras, que no sólo hereda las ideas de Tales y su aura de sabio misterioso y místico, sino que las magnifica al punto en que se le describe como "el Dios Apolo en forma humana.[…]"[9]. Y del mismo modo está rodeado de leyendas fantásticas, ejemplarmente compiladas en el trabajo de Diógenes Laercio. En su *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres* podemos encontrar multitud de historias fantásticas sobre la vida y obra de Pitágoras; y como la pretensión del libro es recoger todas las versiones que encuentra, a menudo encontramos pasajes contradictorios. De entre la miríada de afirmaciones extrañas y míticas, estas son algunas de las cosas que podemos establecer con mayor certeza. Al igual que Tales, Pitágoras de Samos viajó mucho. Viajó a Egipto y Mesopotamia (según algunas versiones como prisionero de guerra[10]), y a su regreso, alrededor de 525 a.n.e. hizo un viaje por Creta. Posteriormente abandonaría Samos y se iría a Crotona, en el Sur de Italia, donde se establecería de manera definitiva. Ahí fundaría la secta pitagórica, una sociedad secreta cuyo antecedente más cercano son los órficos y cuya influencia es apreciable incluso hoy en día.

La piedra angular de la secta, la afirmación radical que los *mathematikoi* (nombre que se daba a los miembros de la secta) seguían es: que en su esencia, el mundo está hecho de

[8] (D-K 11 A 20) Proclus, en Euclides, 157,10-13:
[9] Kahn (2001), p.5.
[10] Iamblichus (1818).

matemáticas[11]. Como lo dice Brumbaugh: "Es difícil para nosotros hoy día, familiarizados como estamos con la abstracción matemática pura y con el acto mental de la generalización, apreciar la originalidad de esta contribución pitagórica"[12]. La matemática era una herramienta práctica, una serie de operaciones que me ayudaban a resolver problemas del mundo *real*, como la construcción de una casa, las cuentas de un negocio o la predicción de la llegada de la primavera. En el tiempo de Tales, se concibe la existencia de conceptos abstractos que permiten categorizar de manera adecuada las características cuantificables de los objetos, como poner a todas las cosas cuya forma se pareciera a la de una caja bajo el concepto abstracto de un cubo. Ninguna caja *es* un cubo, en tanto que sus caras tienen volumen y sus aristas no son rectas perfectas, pero si le quito estas imperfecciones, puedo pensar que es un cubo. Lo que hay son objetos y el concepto se ajusta medianamente bien a ellos. Pitágoras hace un salto radical: lo que existe son matemáticas, enunciados sobre entidades abstractas perfectas y las entidades *reales* son sólo un reflejo de ellas. La Verdad, aquello a lo que hay que aspirar espiritualmente, se obtiene a través del estudio de estas relaciones eternas que se encuentran principalmente en las matemáticas y en la música.

El ejemplo más claro de esa afirmación está en la armonía (noción que le debemos a los pitagóricos): en busca de la belleza en la música los pitagóricos encuentran que la relación *virtuosa* entre las longitudes de dos cuerdas es precisamente que la cuerda más larga sea un número entero de veces la más chica. La elegancia de ese resultado, la simplicidad matemática de las relaciones musicales es para los pitagóricos una prueba de que han encontrado un resultado verdadero. Puesto así, la tarea del pitagórico es entender la armonía escondida entre las cosas y *afinarse* a ella.

Así, hombres y mujeres de la secta se consagraban al estudio de la naturaleza y a la búsqueda de aquellas relaciones ocultas, y según tenemos noticia, seguían un estricto código de ética en el que se incluía una cláusula de estricto silencio respecto a lo que aprendían en la secta. Ponían un especial interés en las demostraciones matemáticas deductivas y promovieron su desarrollo en algebra y geometría, teniendo más fe en la primera pero obteniendo más resultados en la segunda. El sistema de admisión incluía un largo periodo en que los aspirantes

[11] Este punto es fuente de debate. Podría ser que Pitágoras sentara las ideas místicas y fuera Philolaus, casi un siglo después el encargado de introducir la preocupación matemática a la secta. Además, para la época de Aristóteles ya hay dos sectas pitagóricas rivales, los ya mencionados mathematicoi y los akousmatikoi, preocupados estos ultimos más por la preservación de los ritos que por la parte matemática.
[12] Brumbaugh(1981),p.32.

se reunían a escuchar lecciones pero sin derecho a hablar y años más tarde, de ser admitidos, podían conversar cara a cara con su maestro. En algún sentido, era la primera academia. Creían además en la *metampsicosis*[13] y en la idea de que el conocimiento es memoria, pues las verdades eternas e inmutables siempre han estado ahí y las hemos olvidado en el camino. Se les adjudica además la prueba de numerosos teoremas, entre el que se encuentra, por supuesto, el que lleva el nombre del maestro: el teorema de Pitágoras. Otra vez Diógenes nos dice:

> Que se ejercitó principalmente en una especie de ella que es la aritmética. Y que inventó la escala musical por una cuerda sola. Ni se olvidó de la medicina. Apolodoro el Computista refiere que sacrificó una hecatombe habiendo hallado que en un triángulo rectángulo la potestad de la línea hipotenusa es igual a la potestad de las dos que lo componen. De esto hay el epigrama siguiente:
> Pitágoras, hallada
> aquella nobilísima figura,
> bueyes mató por ello en sacrificio (570).[14,15]

El poder de estas ideas y su influencia sobre los otos pensadores de su época es inmenso. Podemos entender porqué. Como lo dice Alonso Takahashi:

> Aunque los protagonistas que hemos convocado son personajes nada ordinarios, es posible que sus experiencias no sean extraordinarias. Que, dadas unas condiciones propicias, pueden ser experiencias más bien corrientes. Imaginemos una persona con mente abierta e inquisitiva, que se hace preguntas y busca respuestas […]un día la curiosidad o el azar lo ponen en contacto con la matemática, y entonces ve algo que no ha visto jamás. Es posible que una afirmación insólita [como es el teorema de Pitágoras],quizás increíble, llame su atención. Pero lo que en realidad cautiva su interés es que la afirmación viene acompañada por una prueba. Una prueba que no apela a la experiencia, ni a los

---

[13] Diógenes Laercio(2009)
[14] Ibid
[15] Existe la creencia de que era parte del código de las pitagóricos ser vegetarianos (por la *metempsicosis*), pero al parecer esta práctica se adoptó más adelante

> sentidos, ni a la autoridad, ni a la tradición, ni a la ley, ni a la fe; ni siquiera al llamado sentido común. Sólo apela a algo que, ahora comprende, ha llevado siempre consigo, su razón. Y su razón, sin ayuda ni presión de nadie, le dice que la afirmación es irrebatible. Entonces siente que, por primera vez en su vida, ha encontrado la certeza sobre la tierra. Y el corazón le da un vuelco.[16]

Un mundo perfecto, con verdades eternas e inmutables; trasmigración de las almas; conocer es recordar; academia… Todas estas ideas pitagóricas están presentes en uno de los filósofos más leídos de la antigüedad, el alumno pródigo de Sócrates: Platón. Por poner un ejemplo:

> En el Menón, el diálogo sobre la excelencia (areté), asistimos a la clase de matemáticas más célebre de todos los tiempos. En ella Sócrates, es decir, Platón, aprovecha el problema de la duplicación del cuadrado, un caso especial del teorema de Pitágoras, para sostener que el conocimiento es reminiscencia (anamnesis) y, de paso, ilustrar la pedagogía interactiva mediante preguntas y respuestas (mayéutica), todo ello basado en la transmigración de las almas (metempsicosis)[17]

El mundo de las Formas que Platón proponía estaba motivado por la desconfianza del filósofo en sus sentidos, pues ya ha tenido suficientes pruebas de que las experiencias mundanas filtradas por éstos pueden llevarnos a creer equívocos. La ideas en cambio, los conceptos puros y sus relaciones podían ser aprendidos por el intelecto aprendiendo así verdades fundamentales. Estas nociones se complementaban maravillosamente con las investigaciones pitagóricas y lograron convertirse en uno de los pilares de una tradición de pensamiento que duraría alrededor de veinte siglos en Europa. Es posible que las ideas de la secta de Crotona llegara a oídos de Platón a través de su amigo y protector Arquitas de Tarento, un auténtico miembro de los Pitagóricos y uno de los más ilustres. Al margen de estas especulaciones, la afinidad entre ambas posturas está claramente expuesta en la difundida leyenda que en la Academia, el centro de estudios organizado por Platón, tenía un cartel en su entrada

[16] Takahashi(2006) p.12
[17] Ibid. P.10

que rezaba:

"Que no entre quien no sepa geometría"

Es en este matrimonio de ideas entre los místicos *mathematikoi* y la suspicacia de Platón que germina el poderoso triunvirato de la filosofía clásica, el bien supremo representado en la trinidad virtuosa: Lo Bueno[18], lo Bello y lo Verdadero. El sonido bello de las cuerdas sonando en armonía era a la vez verdadero en matemáticas y bueno para el alma. Y ese Universo abstracto estaba lleno de sentido, de Unidad, de coherencia. Estas ideas, como todas las importantes, son atractivas y peligrosas. Su gran magnetismo, sumado al poder de difusión que representaba la Academia las convirtieron en uno de los grandes discursos filosóficos de la humanidad. A decir de Whitehead, toda la filosofía occidental no ha sido más que una serie de notas al trabajo de Platón (para irritación de más de un filósofo). Los pitagóricos, y Platón con ellos, se deleitaban ante la prístina belleza de las demostraciones matemáticas, en oposición al caos de la vida munda, y elegían lo primero como la fuente de verdad. Pero hay que pagar un precio por la abstracción. El idealismo Platónico permite que la ideología y las opiniones se mezclen con los enunciados de conocimiento, pues si se dejan de hacer experimentos bajo el argumento de que los sentidos engañan, no hay forma de distinguir entre hipótesis contrarias[19]. Lo que es más grave aún: estar dispuesto a sacrificar los hechos empíricos por la "Belleza" de las Ideas, omitir del discurso todos los rincones donde la realidad no se ajusta a nuestras ideas , eliminando en nombre de una Verdad presupuesta las anomalías que de hecho hay en el mundo, es exactamente lo que congela las discusiones en grandes sistemas filosóficos totalizadores e indiscutibles, como ocurre durante la Edad Media con Platón, Aristóteles y el cristianismo.[20]

El pensamiento filosófico quedó así fuertemente ligado al quehacer matemático y los jóvenes ciudadanos griegos se congregaban en torno a las primeras instituciones educativas que se conocen para resolver cuestiones, que ahora nos parecen tan lejanas, como los teoremas del círculo, las características de la justicia y las propiedades de la belleza. En la Academia de Platón, o posteriormente en el Liceo de Aristóteles, o en las bibliotecas egipcias era claro que

[18] Como advierte Werner Jaeger en su *Paideia*: "la palabra bueno en griego (αγα ος, agathos) no tiene solamente el sentido ético estricto que hoy se le da, sino que es el adjetivo correspondiente al sustantivo **areté**, designando, por tanto, toda clase de virtud o excelencia" (Jaeger(1990), p.534).

[19] Este idealismo es relativamente nuevo entre los pensadores griegos y aparece en oposición a la tradición experimental jonia. (Sagan[1980], p.p. 180-185)

[20] Tiene además implicaciones políticas analizadas en el texto antes citado.

si bien los Dioses eran caprichosos, había regularidades en el mundo que ni ellos podían cambiar.

> En el siglo V a.n.e. […] los matemáticos ya habían construido largas cadenas de teoremas geométricos en los que cada teorema se deducía, informalmente, de los anteriores. Cada cadena empezaba con generalizaciones de la experiencia que por supuesto no eran probadas.
>
> En la medida en que crecía el rango de estas cadenas emergía la idea de que se podrían vincular todas en una sola red, anclada a un número pequeño de generalizaciones de la experiencia […] Hacia el final del siglo […] un matemático llamado Hippokrates de Chios logró exactamente eso, en un libro que llamó los *Elementos*.[21]

Con el perfeccionamiento del andamiaje matemático y pruebas cada vez más claras y simples, se siguieron escribiendo *Elementos*, sistemas de geometría que eran usados como libros de texto. La conclusión de este refinamiento alcanzó su punto máximo en la obra central de la historia que nos convoca.

1.2. Los Elementos de Euclides

Los *Elementos* de Euclides son, ahora podemos decirlo, la más sólida y fértil maravilla de la antigüedad. Este hermoso edificio, construido sin paredes ni columnas, esta pirámide invertida, ha resistido el paso del tiempo como ningún otro; ha inspirado y guiado el pensamiento humano como aquel faro de Alejandría hacía con los barcos en el mar; fue uno de los gigantes sobre los que Newton se paró para ver más lejos, el jardín colgante del conocimiento. Es además, síntesis y convergencia del pensamiento occidental clásico: la mística pitagórica, el platonismo, la lógica clásica.

> Sobre la vida –no ya los milagros- del propio Euclides, sólo parece haber dos referencias relativamente dignas de crédito. Una: fue más joven que los alumnos de Platón (muerto en el 347 a.n.e.), mayor que Arquímedes (nacido hacia el 287), coetáneo del instaurador de la dinastía tolemaica, Tolomeo Sóter (367/6-283). Y dos: enseñó o formó escuela en Alejandría.[22]

---

[21] Trudeu [2001] p.p.4,5

[22] Vega [1991] , p.9

Es decir que trabajó alrededor del 300 a.n.e. Sabemos además que escribió alrededor de una decena de libros entre los que se encuentran los *Fenómenos*, la *Óptica*, *Sobre cónicas,* o *Sobre divisiones de figuras*. Hoy en día sólo conservamos dos: los *Datos*, que se trata probablemente de un comentario complementario al tratado de geometría, y los *Elementos*, el libro por el que sin duda Euclides recibe toda su fama. De este último, además, la primera versión que conocemos es la traducción de Theon de Alejandría, del siglo IV , y un papiro previo[23] que descubrió en 1808 en la biblioteca del vaticano François Peyrard. La primera edición crítica es de apenas 1883-1887, publicada por Johan Ludvig Heiberg y Heinrich Menge. Aun así, tenemos bastante confianza en contar con versiones fidedignas y sabemos que el tratado de Euclides rápidamente sustituyó a todos los de su clase, por lo que de ahora en adelante, cuando me refiera a las *Elementos* asumiremos que se trata de esta última versión.

Ahora bien, aunque mucho del contenido de esta obra no es original, y muchos de los resultados ya habían sido probados previamente (como el muy citado caso de los inconmensurables[24], incluidos en el libro X de los *Elementos* y cuyas pruebas originales se pueden rastrear a Eudoxo, alumno directo de Platón), la verdad es que la importancia del libro no radica en su contenido, sino en su forma.

Empieza, sin previa advertencia ni unas palabras sobre su propósito, con veintitrés definiciones ,que van desde la noción de un punto como un objeto sin partes, una línea, un plano, o un círculo y termina con una definición de paralelismo; cinco postulados que revisaremos a continuación; y cinco nociones comunes que establecen relaciones lógicas básicas (como la transitividad de la igualdad). De estos poquísimos enunciados Euclides, con una impecable lógica deductiva, va demostrando uno a uno todos los teoremas geométricos importantes que se conocían. A lo largo de trece libros (o capítulos) se organizan todas las cadenas de demostración que se habían construido previamente, en un sistema ejemplar por su claridad, su consistencia y su espectro de aplicación. Representa el primer sistema axiomático material de la historia, el arquetipo de conocimiento certero para toda la evolución posterior de occidente, incluida la ciencia moderna.

> La aparición del tratado de Euclides marcó decisivamente la tradición matemática griega. Aparte de su autosuficiencia como exposición elemental y sus virtudes sistemáticas y disciplinarias, los

[23] Y cuya antigüedad exacta no he podido determinar.
[24] Decimos que dos segmentos son inconmensurables entre ellos si no existe un tercer segmento que cabe un número entero de veces en ambos segmentos.

> *Elementos* contenían el acervo primordial y común de conocimientos de los geómetras alejandrinos.[25]

En las palabras de Antonio Durán, "Los *Elementos* suelen figurar, junto con la *Biblia* y el *Quijote*, en esas listas de libros más editados y traducidos que se dan a la hora de hacer balance de la cultura occidental y de las que siempre se desconfía un poco."[26]

El contenido está organizado de la siguiente manera: el libro primero sienta las bases de la geometría y prueba los teoremas fundamentales; el segundo se dedica a lo que ahora se ha nombrado como álgebra geométrica; el tercero y el cuarto al círculo y figuras inscritas en él; el quinto y el sexto a la teoría de proporciones; los siguientes tres a la teoría de números[27]; el décimo, como ya habíamos dicho, a los inconmensurables; el undécimo a desarrollar la geometría sólida, el siguiente a la medida de figuras y el último a la construcción de los sólidos regulares, probando en la última proposición la unicidad de los también llamados "sólidos platónicos". Es decir, que si uno acepta las reglas del juego establecidas en los primeros cinco postulados (o axiomas, en un lenguaje un poco más moderno) entonces su razón lo obliga a aceptar la existencia y unicidad de sólo cinco poliedros regulares, pues existe una serie de pasos lógicos que llevan de lo primero a lo segundo.

En ese sentido, la virtud del sistema de Euclides por encima de los trabajos que lo precedieron es que encuentra un conjunto increíblemente simple de reglas que *contienen* a la geometría y encuentra métodos y construcciones adecuadas para probar casi todo lo demás.[28] Es esta sensación de completitud la que llevaría a Legendré, siglos después, a pronunciar que la geometría es una lengua muerta después de Euclides[29]. Estos primeros cinco axiomas dicen:

> Postulados
>
> 1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera
> 2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
> 3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia
> 4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí

[25] Vega [1991], p. 40.
[26] Duran [2002], p. 2.
[27] Aunque siempre se le relaciona con la geometría, el libro tiene un espectro un poco más amplio.
[28] Ya para ese momento se habían encontrado algunas anomalías, construcciones geométricas imposibles de las cuales Euclides no podía decir nada, como la cuadratura del círculo o la trisección del ángulo. Con el tiempo se convertirían en problemas célebres.
[29] Vega [1991], p.92.

> 5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace ángulos internos y del mismo lado menores que dos rectos, las rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.[30]

Ahora bien, el sentido de estos enunciados puede ser mal interpretado si lo vemos desde nuestra óptica moderna. En principio este es un conjunto que fue construido por el arduo camino de la generalización y tras muchos intentos fallidos. Su carácter de postulados iniciales se debe a que, aparentemente, son las propiedades más simples que hay entre las relaciones espaciales de objetos en el mundo, en oposición a nuestra concepción de que el axioma es lo más general y abstracto. Es decir, su sentido original era el de ser verdades *evidentes* (y por lo tanto irrebatibles), enunciados tan básicos que cualquiera que hubiera estado en contacto con el ejercicio matemático debía tenerlas por ciertas.

Pasar de lo *evidente* a lo asombroso con esa elegancia y ese rigor, es un hito en la historia: la encarnación novedosa y reluciente de la trinidad platónica.

> En resumen, la matemática tiene tres facetas que pueden cautivar la inteligencia y encantar la imaginación: la elegancia de sus procedimientos, la certeza de sus afirmaciones y la utilidad de sus aplicaciones. Por eso, cuando el velo de familiaridad se levanta, como a veces ocurre, permite vislumbrar, tal vez por un instante, el Bien, la Verdad y la Belleza.[31]

A este respecto debemos hacer una precisión. Luis Vega en su “Introducción General”[32] expresa correctamente que, “la presunta <<filosofía de la matemática>> de los *Elementos* nos podría recordar alguna vez a Platón, otras a Aristóteles, pero sus cauces de pensamiento - digamos- son generalmente los abiertos por la tradición matemática” Como ya dijimos, el texto no se detiene a discutir sus conexiones con posturas filosóficas y se dedica exclusivamente a probar resultados matemáticos. De todos modos, aun si los propósitos de Euclides no tenían relación con la agenda de la Academia de Atenas[33], el trabajó final les vino

[30] Euclides[1991], p.197.
[31] Takahashi [2006],p. 23
[32] Ibid, p.25
[33] De alguna manera, la inclusión de los inconmensurables es un golpe a la adoración por las razones entre números enteros de los pitagóricos.

como anillo al dedo para ejemplificar le existencia del mundo de las ideas que tanto les gustaba, un mundo de verdades eternas, útiles y elegantes.

En cualquier caso, con los *Elementos* surgió el libro de texto más exitoso de la historia, y hasta hace casi un siglo, cualquier europeo educado había pasado alguna vez por el sistema de geometría de Euclides. Fue así que convenció una cultura completa y durante veintidós siglos se lo consideró la prueba inequívoca de que la razón podía acceder a la Verdad.

1.3 La semilla del mal

Existía, sin embargo, una pequeña inquietud. Por la contundencia de la exposición de Euclides, el margen de maniobra para los estudiantes de geometría posteriores se redujo casi hasta limitarse a comentar la obra ya acabada. En el mejor de los casos, si su ingenio y la paciencia lo permitían, un geómetra encontraba una forma de probar algún teorema que era ligeramente más clara, o elegante. Pero la tarea se parecía a llenar las notas al pie de página, o pulir a su máximo un sistema exento de fallas. El primero en expresar esa inquietud del que tenemos noticia fue Poseidonio(135 a 51 a.n.e.) quien, por razones estéticas sugirió cambiar la forma del quinto postulado a una formulación de paralelismo que incluyera explícitamente la propiedad equidistante de las rectas involucradas, pero sin duda la definición de equidistante parece menos intuitiva que el axioma original. Sabemos de los intentos de Poseidonio por cambiar el quinto postulado por una obra que aparecería cuatro siglos más tarde, los *Comentarios al Primer Libro de Euclides* de Proclus de Atenas, un importante filósofo griego del siglo V. Nacido en Constantinopla y formado en Alejandría, terminaría por asentarse en Atenas, guiado por su devoción por la Diosa Atenea y estudiaría en la institución financiada con el tesoro imperial conocida como la Academia y que efectivamente era la heredera de la que Platón 800 años antes había fundado. Estudió bajo la tutela de Plutarco y Siriano. A la muerte de este último, alrededor del 450, Proclus se convirtió en el director de la Academia y ocupó el puesto hasta su muerte. Escribió diversos tratados y comentarios sobre autores de la tradición platónica (así como dos sistemas filosóficos propios) y con ello se ganó el título de "Diádokos", el Sucesor de Platón[34]. Felix Klein le atribuye la frase: “Donde sea que hay número, hay belleza”. Muchísima de la información que poseemos sobre la recepción de la obra de Euclides en el periodo clásico proviene de los comentarios de Proclus. Por ejemplo, en ellos encontramos la idea de que “por elección propia Euclides fue un seguidor de Platón y

[34] Todo esto lo sabemos por la biografía que Marino de Samaria, un discípulo directo, haría de Proclus. “Proclus o sobre la felicidad” lo presenta como un maestro iluminado y bendecido por los Dioses.

conectó con esta escuela de filosofía. De hecho, él puso como objetivo de los *Elementos* la construcción de las llamadas figuras platónicas o que " […]los *Elementos* contienen la guía completa e irrefutable hacia un estudio científico sobre la geometría".

Ahora bien, entre el extenso trabajo que hace Proclus sobre los *Elementos*, expone una crítica aguda, un atrevimiento extremo frente al representante de la Verdad, una anotación que tendría consecuencias insospechadas para él. Refiriéndose al quinto de los postulados dice:

"Este [postulado] debe ser borrado por completo de la lista de los postulados porque se trata de un teorema hechido de dificultades, que Tolomeo se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas."[35]

Es verdad que, comparado con los otros postulados, el quinto resulta un poco extraño. Digamos que no tiene la misma cualidad intuitiva de los otros cuatro y que, si bien una vez que desmenuzamos su contenido no podemos negar su *verdad*, algo en su planteamiento es cualitativamente distinto. Proclus se imagina que debe existir alguna forma de demostrar ese enunciado usando sólo los otros cuatro, que el quinto postulado no es independiente sino una consecuencia necesaria de los anteriores.

"Es entonces claro [continua Proclus] que debemos buscar una prueba del presente teorema, y qué es ajeno al carácter especial de los Postulados. Pero como debe ser probado[…] Será necesario […] mostrar que su carácter obvio no aparece independiente de prueba, pero es convertido por la prueba en materia de conocimiento".

Por este enuciado, Proclus merece quiza el título de *padre de la metageometría* (como la llamaría siglos después Russell), pues la negacion del quinto postulado es una preocupación, no ya sobre la geometría, sino sobre las propiedades estéticas del sistema axiomático.

El intento por encontrar esa prueba al quinto postulado resultó ser mucho más profundo y complicado de lo que Proclus suponía y se convertiría en una de las preguntas más difíciles de la historia. El trabajo que viene a continuación es una narración de su respuesta, que afortunadamente, resultó ser a su vez, una realmente sorpresiva y extraña.

[35] Proclus[1970], p. 191.

Capitulo 2

Antecedentes modernos[36]

El espacio de Euclides es, a todas luces, el espacio intuitivo y natural en que nos movemos. Es la geometría que arquitectos e ingenieros civiles requieren para construir casas y puentes. A pesar de que sus teoremas pueden ser sorprendentes, sus hipótesis provienen de la "observación" y abstracción de objetos geométricos en nuestro pequeño mundo y sus axiomas se presentan, como ya hemos dicho, como verdades *evidentes*. En ese sentido, insisto en que los *Elementos* lucen más por su forma, por la estructura lógica en la que se trata el problema de la geometría, que por el contenido en sí.

Sin embargo, siglos después de su aparición, para un europeo educado del siglo XV por ejemplo, Euclides es mucho más que una simple representación axiomática del espacio físico. Es, fundamentalmente, la prueba fehaciente del poder de la razón pura; la conquista que el pensamiento clásico tuvo sobre nuestra caótica realidad y el acceso al mundo de las ideas Platónico; el conocimiento inmutable, eterno y objetivo; la gran certeza.

Un buen ejemplo de la atracción que los *Elementos* producían sobre los pensadores europeos, mucho siglos después de su concepción es la siguiente revelación que tuvo Thomas Hobbes, narrada por un íntimo amigo suyo:

> Alcanzó los 40 años sin haber prestado atención a la geometría y, cuando por fin lo hizo, fue por casualidad. Estando en la biblioteca de un caballero, vio, sobre una mesa, los *Elementos* de Euclides, abierto en la Proposición 47 del libro I37. Leyó el enunciado y exclamó "¡Válgame Dios!, esto es imposible." Así que leyó la demostración, la cual lo remitía a otra proposición, la cual también leyó. Et sic deinceps hasta quedar convencido, por vía demostrativa, de esa verdad. Fue así como se enamoró de la geometría (Bronowski, Aubrey: 69).[38]

Si queremos, como es mi intención, entender el cambio radical que sucedió a principios del siglo XIX y el tipo de actitud necesaria para desafiar la institución en que Euclides se había convertido, es preciso entender el alcance y la profundidad de la influencia que tenía sobre el

[36] En el sentido filosófico.
[37] Esta proposición es el famoso Teorema de Pitágoras
[38] Takahashi [2006], p.1.

pensamiento. Intentaré presentar a continuación, algunos ejemplos y algunas de las concepciones euclidianas que cimientan la cosmovisión europea ilustrada, con la conciencia de que es un tema inagotable y que, por tanto, es sólo una reconstrucción parcial, una pequeña muestra que no está, por mucho, completa.

2.1 La revolución copernicana

Es bien sabido que en la historia de las ideas occidentales, hay un parte aguas que comienza con la publicación de *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Copérnico. El nuevo modelo cosmológico, repercute sobre toda la visión del mundo y en poco tiempo, se transforma en la piedra angular de lo que hoy llamamos ciencia.[39]

En el camino, se libra una violenta batalla ideológica en que antiguas concepciones sobre lo verdadero, quedan separadas del conocimiento objetivo y que, después de siglos de hegemonía, terminan relegadas a un papel de códigos morales, pero no de verdades sobre el mundo[40]. Pero, por supuesto, no todo se derrumba y, en particular, el pensamiento clásico previo al cristianismo parece representar un estandarte de la dignidad humana frente a la imposición religiosa, y su recuperación un deber del pensador renacentista. Entre las ideas que pasan ilesas este periodo convulso, está la matemática griega (perdida durante siglos en Europa, pero recuperada en la alta Edad Media por el contacto con el mundo árabe durante las cruzadas) y, por supuesto, la geometría de Euclides. Así, cuando el *máximo tribunal de la verdad* dicta sentencia y el "universo establecido" de Newton sustituye el "universo afirmado" de Aristóteles[41], el sino euclidiano queda impreso en la mentalidad europea como un tatuaje metafísico, libre de toda duda.

2.1.1. Kepler y las elipses

Podemos rastrear la influencia de los *Elementos* entre los personajes que llevaron a cabo la revolución copernicana, y, dado que el final de su historia representa uno de los primeros ejemplos que conozco de renuncia abierta a las ideas platónicas, he decidido empezar por Kepler. En medio de una infancia marcada por el desastre "astrológico" (como el mismo lo consideraba), hijo de un mercenario y una "bruja"[42], débil y enfermizo, Kepler aprovechó la

---

[39] Tema ampliamente discutido por T. S. Kuhn en *La revolución copernicana*.

[40] Según la concepción clásica: *a* sabe que *p* si *a* cree que *p*, *a* tiene razones para creer que *p*, y *p* es verdadero. Una epistemología más moderna incluye el papel del los prejuicios de las comunidades como parte del contexto no sólo de descubrimiento, sino también de justificación.

[41] Parafraseando a Bernal.

[42] La inquisición nunca pudo probar nada, pero aun así había " un aura de magia y brujería sobre ella" Koestler [1989] p. 232.

libertad académica que reinaba en su patria debido al recién adquirido protestantismo y el buen uso de su cabeza para sobrevivir a una vida muy complicada. Inclinado hacia la religión, cuando terminó la Escuela Latina Elemental, ingresó a un seminario teológico. Ahí estudió griego y latín, teología, a los paganos clásicos, retórica y dialéctica, música y, por supuesto, matemáticas. Ahí conoció, como cualquier otro joven europeo con educación, la geometría euclidiana, pues era parte del currículo convencional de la época.

Después de graduarse de la Facultad de Artes de la Universidad de Tübingen, siguió estudiando como seminarista, pero el destino hizo que, poco antes de pasar su último examen del seminario, Kepler recibiera el ofrecimiento de una plaza como maestro de matemáticas y astronomía en Gratz, capital de la provincia austriaca de Styria.

Fue ahí donde Kepler se vio envuelto en la polémica sobre el modelo copernicano, por "razones metafísicas" (una vez más, según sus propias palabras), o místicas, para ser más precisos. Ya por esos años su afición por la astrología lo lleva a publicar calendarios astrológicos y a interesarse por la predicción correcta del movimiento de los astros.

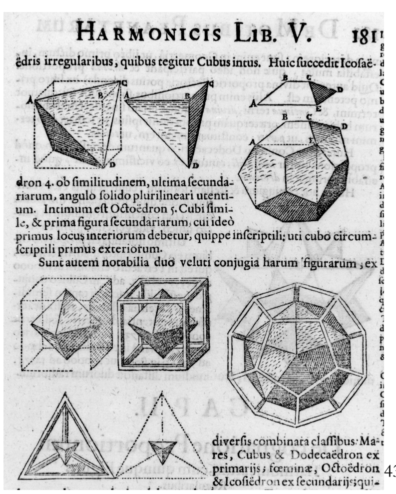
Desde sus primeros años en Gratz, Kepler escapaba del tedio con especulaciones cosmológicas que, afortunadamente, escribía detalladamente. De hecho, Kepler escribía compulsivamente todo lo que se le ocurría (que era bastante) y es así como conocemos, no sólo sus descubrimientos "científicos", sino también sus historias de amor, sus preocupaciones metafísicas, sus ocurrencias matemáticas y su historia familiar. Una fortuna para el historiador pues no sólo están los éxitos, sino también todas las ideas fallidas por las que pasó, para llegar a sus resultados. Así, sabemos que el 9 de julio de 1595 (o el 19, según que calendario se use), Kepler concibió una idea a la que dedicaría el resto de su vida: el Universo está construido encima de un esqueleto invisible de figuras geométricas. Es uno de sus primeros intentos fallidos el que me gustaría revisar.

La idea se le ocurrió cuando notó que, entre las órbitas de Saturno y de Júpiter (cuya relación de tamaños conocía por el trabajo en los calendarios astrológicos), se podía dibujar un triangulo equilátero de forma que quedara inscrito en la primera y circunscrito por la segunda.

Intentó entonces hacer lo mismo entre las orbitas de los demás planetas, poniendo distintos polígonos regulares entre sus órbitas. No funcionó, pero no abandono su idea original. En algún momento nos dice:

> Y ahora seguí presionando. ¿Por qué buscar formas bidimensionales que ajusten las órbitas en el espacio? Uno debe buscar formas tridimensionales- ¡y, atención querido lector, ahora tienes en tus manos mi descubrimiento!

El descubrimiento que tanta ilusión le hace, es que el número de intervalos entre los planetas, es exactamente el mismo que el número de sólidos platónicos (por definición tridimensionales): sólo hay cinco, como lo prueba Euclides en el último teorema del último libro de los *Elementos*. No podía ser una coincidencia y lo que es peor, los sólidos platónicos ¡ajustaban con las órbitas! Nació así el modelo fallido más bello (a mi juicio) de la historia.

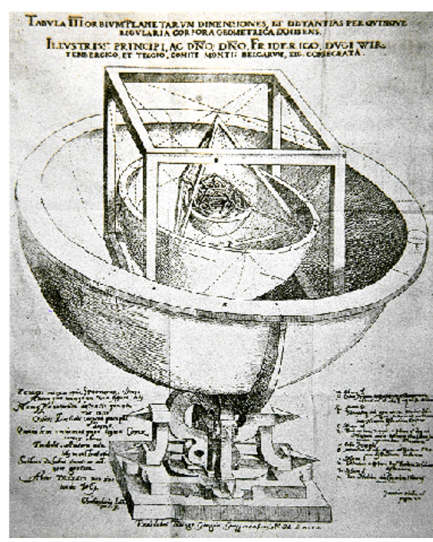


HARMONICIS LIB. V. 181

ëdris irregularibus, quibus tegitur Cubus intus. Huic succedit Icosaë-dron 4. ob similitudinem, ultima secundariarum, angulo solido plurilineari utentium. Intimum est Octoëdron 5. Cubi simile, & prima figura secundariarum: cui ideò primus locus interiorum debetur, quippe inscriptili; uti cubo circumscriptili primus exteriorum.

Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex diversis combinata classibus: Mares, Cubus & Dodecaëdron ex primarijs; fœminæ, Octoëdron & Icosiëdron ex secundarijs; qui-

[43]



[44]

[43] Tomado de www.hps.cam.ac.uk/starry/kepler2lrg.jpg
[44] Tomado de cnx.org/content/m11962/latest/kepler_spheres.gif

Detengámonos un segundo para revisar este modelo con nuestra investigación en mente. Revisando la historia de la cosmología, parece evidente que, antes de los datos de Tycho Brahe, el intento humano por explicar la estructura del Universo, está guiado por nociones "culturales" de perfección. Si bien es cierto que, prácticamente en todas las culturas, el círculo y la esfera están asociadas con la máxima belleza y perfección (será por su infinidad de simetrías), y que tal prejuicio producía modelos con problemas predictivos (como le sucedió al mismo Kepler), que a alguien se le ocurra postular a los sólidos platónicos como el esqueleto invisible del mundo es prueba de que asume la veracidad objetiva de la geometría euclidiana. Kepler se arriesga a construir su Sistema Solar platónico entusiasmado por la coincidencia entre el número de espacios entre planetas que conoce y el resultado euclidiano sobre el número de sólidos platónicos, con lo que, tácitamente, eleva dicho resultado a una categoría "divina". Kepler mismo observa:

> La geometría es única y eterna, un reflejo de la mente de Dios.
> Que los hombres puedan participar[45] de ella es una de las razones
> por las que los hombres son una imagen de Dios.
> Por eso me atrevo a pensar que la naturaleza y su cielo
> graciosos están simbolizados en el arte de la geometría...[46]

Si el mundo físico es la sombra del mundo de las ideas, entonces la región supralunar (en este momento de la historia nada hacía suponer que Aristóteles estaba mal en su división entre lo sublunar y lo supralunar) debía estar ligada a la perfección de las formas.

Ahora bien, aunque Kepler debe renunciar a la larga a su idea de perfección, puesto que los datos sobre la órbita de Marte que robó a Tycho no dejaban lugar a la especulación, siempre tuvo problemas para aceptar las órbitas elípticas. De hecho, pasó mucho tiempo entre la primera vez que encontró la ecuación que describía el movimiento de Marte y que desechó por su falta de simetría, y el momento en que por fin aceptó, al grito de "¡Que ave tonta he sido!" las dichosas elipses. Parece "evidente", que la dificultad para encontrarlas radica en el prejuicio, estético y epistémico al mismo tiempo, sobre la forma de la verdad. El mismo reconoce la necesidad de desechar ideas que parecían sólidas. El segundo libro de la *Astronomia Nova* cierra con estas palabras:

---

[45] Usa aquí los mismos planteamientos que Platón

[46] Koestler [1989] p.535.

> Y así el edificio que erigimos sobre las bases de las observaciones de Tycho, lo hemos destruido otra vez... Este es nuestro castigo por haber seguido algunos plausibles, pero en realidad falsos, axiomas de los grandes hombres del pasado.[47]

¿A qué axiomas se estará refiriendo?

2.1.2 Galileo y Newton: la congruencia del espacio

El trabajo de Galileo tiene una relevancia especial para nuestra historia pues es en él, en que se retoma y se afianza la idea de que la geometría euclidiana es la geometría del mundo físico. Efectivamente, la geometría empezó haciendo "observación" sobre objetos geométricos, representados en el mundo físico (pintando en la arena, o colocando cuentas sobre una mesa, etc.) y no fue sino hasta una época tardía, cercana a la aparición de los *Elementos*, que adoptó su carácter plenamente deductivo. De ahí que los problemas sobre la cuadratura del círculo o la longitud de la diagonal del cuadrado fueran tan relevantes pues aparecían naturalmente en la construcción de objetos geométricos, pero no podían ser resueltos con el mismo método de construcción. Así, era intuitivo pensar que los postulados de la geometría se referían a objetos del mundo. Pero, no hace falta hacer muchos experimentos para darse cuenta de que algunos enunciados geométricos, como que la suma interna de los ángulos es 180º, puede no ser exacto en la realidad física. "Si se descubre, después de una medición, que lo que parece un triángulo euclidiano no tiene ángulos que sumen 180 grados, no decimos que hemos encontrado un caso que invalida la proposición matemática de que la suma de los tres ángulos de un triángulo [...] es de 180 grados. Decimos que hemos medido mal [...]"[48] Los triángulos son la abstracción de los que podemos construir aquí, llevándolos a ser líneas sin ancho y puntos sin dimensión. Ahora bien, cuando Galileo postula el principio de relatividad, contribuye a afianzar la idea de que, aquí, en este espacio no platónico en el que vivimos, las reglas del juego geométrico también se cumplen.

El principio de relatividad en lenguaje moderno dice lo siguiente:

"**Existen** observadores inerciales, para los cuales:

1) Todas las leyes de la física son las mismas

---

[47] Koestler [1989], p.328.

[48] Ayer [1983], p.87.

2) Si S es un observador inercial, y S' se mueve a velocidad constante respecto a S, entonces S' es inercial"

Es decir, postula la existencia de marcos de referencia que tienen la peculiaridad de que las descripciones que hacen de la realidad objetiva son congruentes bajo un grupo de transformaciones matemáticas, conocidas como transformaciones de Galileo (G^3). Una vez que un observador inercial establece las reglas de la evolución dinámica de un sistema, todo el conjunto de los inerciales coincide en que las predicciones hechas por esas reglas, son correctas.

Lo curioso es que el grupo de transformaciones G^3 está formado por las transformaciones rígidas del espacio y una ley de suma de velocidades que corresponde a la suma vectorial del espacio euclidiano.

Vamos con calma. Sin entrar en formalismos, Galileo dice que a la realidad física se la puede "deformar" de tal suerte que sus leyes no cambien, si esas "deformaciones" son las mismas que dejan el espacio euclidiano invariante. Por lo tanto, la realidad física, en la que hacemos experimentos y medimos cosas, **es** el espacio de Euclides, al menos en su estructura geométrica.

Por supuesto, no es de sorprender que Galileo proponga esta idea, pues Euclides es todo lo que conoce y en todos los experimentos que puede hacer funciona a la perfección, pero lo que sí es importante notar es que con el trabajo de Galileo se abandona la noción platónica de la geometría y se adopta la postura realista que caracterizó al gran astrónomo italiano. En la búsqueda por descubrir dónde está la geometría, si en el *Topus Uranus*, en la mente, o en el mundo, Galileo se decanta por esto último.

Once meses después de la muerte de Galileo, nace, en la Navidad de 1642[49], el autor de la mayor síntesis científica[50] que haya existido. Su famosísima frase "Pude ver más lejos porque me paré en hombros de gigantes"[51], cargada de simbolismo cristiano que le convertía en el nuevo evangelista, también es cierta en términos históricos si pensamos que los gigantes fueron, Kepler, Galileo y Euclides, entre otros. Y no hace falta mencionar el nombre de quien se para sobre sus hombros. El momento en que aparece a escena Sir Isaac Newton es más brillante que la supernova de Tycho, y es desde todos los puntos de vista un hito irrepetible en

[49] Según el calendario Juliano.
[50] Me atrevería a decir que ideológica, pero no quisiera entrar en debate.
[51] El autor hace referencia a un concepto teológico del siglo XII, según los cuatro profetas eran gigantes sobre los que se paraban los cuatro evangelistas.

la Historia de la ideas. No puedo pretender hacer aquí un análisis sobre las consecuencias filosóficas de la obra de Newton, por lo que me limito mostrar la conexión entre la mecánica newtoniana y la geometría euclidiana.

A decir de un especialista (el asesor de este trabajo), los *Elementos* es probablemente el libro más trabajado de la biblioteca de Newton. Al parecer, una frustración personal, lo llevó a estudiar concienzudamente a Euclides hasta convertirse en un experto. No cabe duda de que, para proponer, por primera vez en la Historia, una teoría matemática predictiva, Newton tuvo que pasar por el ejercicio de abstracción y axiomatización, propio de una teoría matemática, cuyo mayor exponente es Euclides.

> Newton presenta este libro a la manera de los *Elementos* de Euclides. Los *Elementos* se convierte en paradigma para la construcción de los *Principia* de Newton, y este último, a su vez, se convertirá en modelo para la construcción de toda teoría física durante los siglos XVIII y XIX, y prácticamente hasta comienzos del siglo XX.[52]

Sin embargo, puesto que los postulados geométricos son estáticos, inmutables, Newton tuvo que desarrollar una herramienta dinámica (el cálculo) para poder hablar de este mundo cambiante. Es curioso notar, que el desarrollo que hace Newton del cálculo está escrito en el lenguaje de la geometría.

Ahora bien, la mecánica acepta explícitamente el principio de relatividad de Galileo (en la mecánica corresponde a la primera Ley) y, como Newton mismo dijo, el trabajo del filósofo natural consiste en encontrar las leyes de la naturaleza, las leyes de la física que menciona el principio de relatividad. Al parecer, Newton resuelve el problema. Si tomamos la segunda Ley (F=ma) como la regla establecida por un sistema inercial, entonces todos los sistemas inerciales deben usar en su descripción dicha ley. Todos aquellos que se muevan a velocidad constante y estén girados o alejados respecto de ese primer observador, podrán predecir el movimiento de los cuerpos usando esa ecuación diferencial ($\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$). En ese sentido, confirma la tesis de que la naturaleza del espacio es euclidiana. Pero sigue habiendo un problema: ¿quién es el primer observador inercial? ¿Donde está y como hago para saber si me muevo a velocidad constante respecto a él? Consciente de estas cuestiones Newton escribe

[52] Guerrero [2004], p.7.

justo después de las definiciones un escolio sobre el espacio y el tiempo[53], en el que se ve obligado, tanto lógica como epistemológicamente, a introducir la noción del espacio absoluto[54]. Además, para Newton responde también a una necesidad teológica. Efectivamente, el escolio comienza por exponer la teoría cartesiana del espacio, según la cual éste es sólo una asignación relacional entre cuerpos, como una idea vulgar y procede a demolerla contundentemente. Expone entonces su propia noción de espacio absoluto. Este espacio tiene una realidad igual que los objetos, pero es independiente de éstos, antecede la existencia de los objetos y es inobservable, pues sus partes no pueden verse ni distinguirse unas de otras con nuestros sentidos. Además, según el mismo dice "El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil"[55], que equivale a decir que es ese espacio el que debemos tomar como sistema de referencia inercial.

Dicho escolio refleja la importancia que tenía para Newton desarticular el discurso cartesiano, pues atentaba contra sus más devotas ideas sobre la divinidad. En una primera versión de la *Óptica* (1706) Newton se pregunta:

> ¿Acaso el espacio del Universo no es el sensorio de un ser incorpóreo, viviente, inteligente, en el cual abarca y considera las cosas todas en sí mismas y las percibe presentes a sí mismo[…]?

Para Newton "El espacio, en tanto que propiedad de Dios, no podía ser más que absoluto."[56]

Este debate seguiría, con un heredero de las ideas cartesianas, otro filósofo "enemigo" de Newton. Leibniz "desarrolla una concepción de espacio relacional, de acuerdo con la cual el espacio en realidad no existe, éste simplemente es un concepto, una idea, pero que como tal no hay nada real que le corresponda. La idea de espacio la obtenemos a partir de la relación de coexistencia entre los objetos"[57] A diferencia de Newton, Leibniz cree que es posible describir los fenómenos haciendo uso de las relaciones relativas entre objetos, sin apelar a la existencia de una entidad independiente donde las cosas suceden. En la controversia Newton llega

---

[53] Me limito aquí a la noción de espacio, pero el concepto de tiempo absoluto será igualmente relevante para Newton.

[54] Si bien el principio de relatividad nos permite encontrar los observadores inerciales una vez que encontramos el primero, no nos dice quién es ese primer observador inercial, por lo que hay que introducirlo "a mano". Además, en tanto la geometría del mundo en la mecánica es como la que Euclides describe es natural igualar la retícula rectangular de esa geometría con un observador inmóvil en el que suceden las cosas. Por último, siguiendo esta línea de argumentación, Newton añade una tercera equivalencia del espacio con el sensorio de Dios.

[55] Newton [1973], p. 229.

[56] Marquina [2006], p. 105.

[57] Guerrero[2004] p. 10

incluso a plantear un ingenioso experimento para "medir" el movimiento absoluto, pero lo cierto es que, en tanto el espacio absoluto es una necesidad de la teoría mecánica y no una consecuencia, el éxito de la teoría no nos permite probar la existencia de dicho espacio. Así, la investigación sobre este tema seguirá vigente hasta el siglo XX, y será el contexto en el que aparecerá una teoría filosófica que discutiremos más adelante..

Independientemente de estos tecnicismos, los *Principia* son la base de la concepción moderna, científica si se quiere, del espacio. "En definitiva, el espacio absoluto es infinito, homogéneo, isótropo y euclídeo"[58]

La prueba de que la entidad responsable de hacer caer las cosas a la Tierra es la misma que mantiene a los planetas en órbita es la bomba que derrumba, al fin, la cosmología aristotélica y con ella, el paradigma de Europa durante más de quince siglos. El lugar que ocupa el Hombre en el Universo se ve dramáticamente modificado: pasa del centro mismo de lo existente, a un lugar sin nombre ni señas particulares. Hay quienes dicen que este fue el primer golpe directo a la idea de la importancia del Hombre en el mundo (siendo la evolución y el psicoanálisis, el segundo y el tercero, respectivamente) sin embargo, no hay más que mirar la Historia para darse cuenta de que no es así. Aunque efectivamente, como consecuencia de la mecánica, la Tierra perdió su lugar privilegiado (pues una de las grandes pruebas de la validez de la teoría de gravitación es el hecho de que puede predecir las órbitas elípticas que Kepler, usando el modelo de Copérnico, había propuesto y observado) el Hombre ganaba a cambio algo mucho más valioso: la confianza en que el buen uso de la razón puede conducirnos a conocer "La mente de Dios"[59]. Esa confianza en la razón es el sello distintivo de toda una época, la Ilustración, que termina a principios del siglo XX y cuyo primer signo de deterioro es, justamente y como veremos más adelante, la aparición de nuevas geometrías.

De todos modos, el principio de relatividad parece restarle importancia a la locación de un evento, porque a fin de cuentas, las coordenadas del evento son la descripción de un observador arbitrario, por lo que estar en el centro o no depende de donde te pares[60]. Newton mismo reconoce que para la tarea cotidiana de cálculos la idea vulgar del espacio relacional es suficientemente buena, y que la distinción del espacio absoluto es un cuidado adicional que se debe tomar cuando se habla de filosofía.

---

[58] Ibíd. p. 9.
[59] Como la llama S. Hawking.
[60] Esto es cierto sólo si el espacio es "infinito".

Ahora bien, otra de las nociones aristotélicas que, a la luz de la validez de la mecánica, tanto en la Tierra como entre los planetas, resultó falsa, fue la distinción entre el mundo supralunar y el mundo sublunar. En ese sentido, la conclusión de Galileo de que la estructura geométrica del Universo es euclidiana, con el trabajo de Newton es extendida a todos los confines de una región infinita. Es así, que el filósofo natural del siglo XVII queda convencido de que el espacio en el que *la naturaleza del espacio* está contenida en las proposiciones geométricas de los *Elementos*. Esta conclusión es, como ya se sabe, falsa. Sin embargo, y a pesar del increíble éxito publicitario que tuvo, tanto la teoría como su autor, la relatividad no penetró en la cosmovisión moderna con la misma fuerza que el discurso de Newton (o no lo ha hecho todavía).

> La corrección que hace Einstein a la fórmula de la gravedad de Newton es tan pequeña que por el momento sólo le concierne a los especialistas. Las dos ramas más importantes de la física moderna no han sido aún integradas un una síntesis universal [...] Hasta que no aparezca un nuevo maestro [...] el plano estructural sigue siendo el que Newton nos dibujó, a pesar de los alarmantes rumores sobre la curvatura del tiempo [y] la relatividad del tiempo[61]

Con la síntesis newtoniana termina la primera revolución copernicana y sus hijos , estarán marcados por su increíble confianza en la Razón. El crecimiento económico y técnico de Europa en los siguientes siglos, así como la instauración del modelo de producción basado en la explotación de bienes y personas, el quehacer académico, y en general, toda la cultura ilustrada, estará ligada a los descubrimientos e invenciones de los filósofos naturales y por haber sobrevivido la revolución, el *meme*[62] euclidiano queda en el fondo, como la más bella y eterna de la verdades.

2.2 El segundo giro copernicano: de la naturaleza del espacio a la metafísica ilustrada.

El impacto que tiene la síntesis newtoniana sobre el pensamiento europeo despierta una interrogante en el terreno de la filosofía de carácter urgente: ¿cómo es posible acceder al conocimiento objetivo y certero que prueba la mecánica? Efectivamente, lo que más

---

[61] Koestler [1989] p. 504.
[62] En la acepción de Richard Dawkins en "The selfish gene".

sorprende de la física es que se pueda construir un cuerpo de conocimiento consistente y completo que de cuenta de tantos fenómenos a partir de una serie de postulados de los que después se deducen resultados particulares; es decir, que el universo sea conocible. Newton veía en este hecho la mano de Dios, pues al fin y al cabo, la regularidad oculta del mundo detrás de su aparente complejidad parece apuntar a la existencia de una entidad inteligente que lo ha creado con increíble precisión. Si bien esta respuesta de corte teológico es suficiente para detener la investigación metafísica de algunos filósofos naturales, lo cierto es que hay algo que no explica: ¿por qué nosotros, seres imperfectos, podemos acceder a leer la mente de Dios?

Con esta incógnita se inaugura el discurso trascendental de Kant, en el siglo XVIII, y para responderla, sugiere cambiar por segunda vez el centro de la investigación sobre los misterios de la realidad. Con Copérnico cambiamos el centro del Universo de la Tierra al Sol para entender el movimiento de las estrellas errantes y ahora, según Kant, debemos cambiar la atención de los objetos conocibles al sujeto cognoscente para entender cómo es posible el conocimiento. En el prólogo a la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura* Kant nos dice:

> Si la intuición tuviera que regirse por la naturaleza de los objetos, no veo como podría conocerse algo como *a priori* sobre esa naturaleza. Si, en cambio, es el objeto (en cuanto objeto de los sentidos) el que se rige por nuestra facultad de intuición, puedo representarme fácilmente tal posibilidad.[63]

Esta aproximación al problema del conocimiento tiene una serie de virtudes respecto a teorías anteriores. Para empezar, parece ser la síntesis del debate que sirve de contexto a la aparición de la *Crítica*, entre los empiristas que afirman que la experiencia es la única fuente real de conocimiento y los racionalistas que defienden la postura de que el conocimiento es una facultad exclusiva de la Razón. En particular, la discusión sostenida entre Newton y Leibniz sobre la naturaleza del espacio será la puerta de entrada a la nueva filosofía. Kant propone que lo que constituye la experiencia, los fenómenos, es resultado de la interacción del "noúmeno" con la estructura propia del sujeto cognoscente o trascendental. En ese sentido, el sujeto no es pasivo en el acto de conocimiento, sino que los filtros propios de la Razón posibilitan y delimitan lo conocible. Este nuevo interés sobre el sujeto es lo que Kant denomina el giro copernicano.

[63] Kant [1781] p. 20 .

2.2.1 El proyecto trascendental.

En el prólogo a la segunda edición de la *Crítica*, Kant hace una larga disertación para plantearnos su principal preocupación. Espera encontrar el camino que la lógica, la física y la matemática han seguido, pero que, desgraciadamente, la metafísica no: el camino para convertirse en ciencia, es decir, el camino que da a estas disciplinas una certeza incomparable. Envuelto en el debate entre el empirismo y el racionalismo (en el que fue formado, en la metafísica racionalista wollfista, a la que después acusará de dogmática) y el creciente empuje de la Ilustración, Kant resuelve dedicar sus estudios a las facultades y las limitaciones[64] "de la razón en general, en relación con los conocimientos a los que puede aspirar prescindiendo de toda experiencia."[65] Espera así, encontrar los fundamentos para establecer la validez objetiva (universal y necesaria) de la ciencia y evaluar si la metafísica tiene posibilidades de convertirse en una. Como hemos dicho, en la *Crítica de la Razón Pura*, Kant está convencido de que la respuesta se encuentra, no en las propiedades del mundo, sino en la Razón que las aprende.

Empieza pues por una investigación sobre las facultades sensibles del hombre (la estética trascendental), luego se pregunta por las capacidades del entendimiento (analítica trascendental) y termina la obra con reflexiones en torno a las limitaciones de la razón (en la dialéctica trascendental) para terminar por concluir que la metafísica no puede llegar a tomar el carácter de ciencia (aunque esto no implica que no tenga importancia, sino simplemente que no puede conseguir los cánones de validez objetiva de la física o la matemática).

Pero éste es sólo el principio del proyecto kantiano, que es extremadamente ambicioso. Si bien con la *Crítica de la Razón Pura* establece la epistemología que guiará el pensamiento europeo hasta la aparición de geometrías no euclidianas, no se conforma con los problemas de la razón pura y seguirá por estudiar otras áreas igualmente importantes de la experiencia humana. Kant intentar construir un sistema que responda a tres preguntas centrales de la existencia: ¿Qué puedo conocer? ¿Qué debo hacer? ¿Qué me cabe esperar?

Cada una de estas interrogantes son ampliamente discutidas y constituyen los pilares de la teoría crítica: la pregunta por el conocimiento, por la ética y por la teología, pero esas son otras historias y deben ser contadas en otro momento[66].

2.2.2 Los juicios sintéticos a priori: la posibilidad de la ciencia

---

[64] Este es el sentido de crítica en la obra de Kant: un conjunto de puntualizaciones y determinaciones acerca de algo, su demarcación

[65] De aquí el nombre de trascendental: lo que trasciende a los sentidos. Kant[1781] p. 9

[66] Parafraseando *La Historia Interminable* de Michael Ende .

En nuestra investigación es de especial interés la pregunta por el conocimiento Veamos entonces cómo responde Kant a las preguntas: ¿cómo es posible el conocimiento? ¿Cómo es posible que el Hombre, un ser racional por antonomasia, pueda conocer el mundo? y en particular ¿cómo es posible el conocimiento científico, demostrado por la revolución copernicana? ¿Cuales son las causas necesarias para acceder al tipo de certezas con poder predictivo que tiene la mecánica?

Para empezar, Kant necesita una forma de "cuantificar" el razonamiento humano y propone una partición "natural" de todos los juicios en dos categorías: analíticos y sintéticos. Define los juicios analíticos como aquellos en que el predicado está "contenido" en el sujeto y los sintéticos como aquellos en que el predicado aporta un nuevo elemento sobre el sujeto[67].

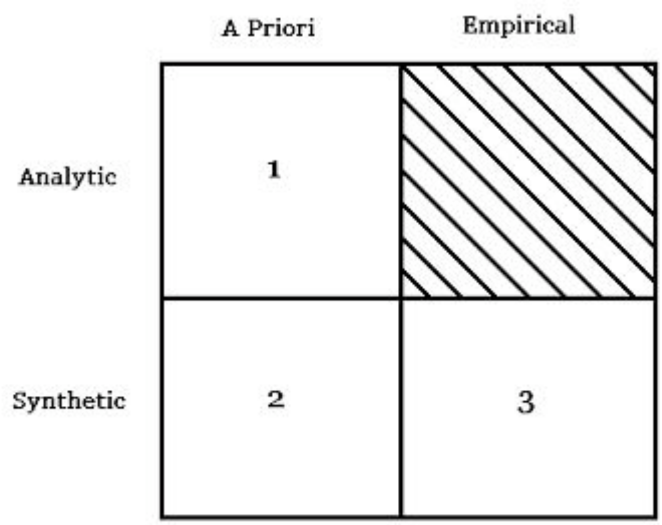
Así, la proposición "de cada diez televidentes que ven televisión, cinco son la mitad"[68] es un juicio que no requiere comprobación empírica y que no aporta nueva información sobre el sujeto (los diez televidentes). En cambio, la proposición "el cielo está nublado", carece de necesidad y por tanto, debemos recurrir a la información de los sentidos para probar su veracidad.

Estas definiciones traen consigo un primer resultado importante: todos los juicios analíticos son una variante del principio de identidad ("a es a") y esto implica que la verdad que expresan está en la forma lingüística y no en la experiencia. Así, la validez de estos juicios es independiente de la experiencia, o *a priori*. Todos los enunciados analíticos son a priori. Por otra parte, cualquier juicio que requiera para probar su veracidad el uso de la experiencia, de los sentidos, es necesariamente sintético y su verdad es a posteriori. Es decir, que todos los juicios cuya prueba de verdad es a posteriori son sintéticos.

Ahora bien, los enunciados de la matemática pura, de la geometría euclidiana en particular que son: ¿analíticos o sintéticos? "Ante todo hay que tener en cuenta lo siguiente: las proposiciones verdaderamente matemáticas son siempre juicios *a priori*, no empíricos, ya que conllevan necesidad, cosa que no puede ser tomada de la experiencia"[69]. ¿Quiere esto decir que son juicios analíticos? Un ejemplo que el mismo Kant usa es el análisis de la proposición "La línea recta es la más corta entre dos puntos". Arguye que no puede tratarse de un juicio

[67] Después de la revolución que pretendemos estudiar, estas definiciones serán ampliamente revisadas y modificadas, pero debemos tener en cuenta que Kant construye su filosofía respondiendo al conocimiento accesible en su época y que, las definiciones que proponen son están influidas por el conocimiento "científico" del momento y responden adecuadamente a las necesidades de su sistema.
[68] Célebre frase de Les Luthiers.
[69] Kant [1781]p. 51.

analítico pues "mi concepto de recto no contienen ninguna magnitud, sino sólo cualidad. El concepto <<la más corta>> es, pues, añadido enteramente desde fuera. [...] Hay que acudir pues a la intuición, único factor por medio del cual es posible la síntesis." Por lo tanto, deben ser sintéticos. Los filósofos previos a Kant (Leibniz y Hume, en especial) habrían desechado la existencia de juicios sintéticos *a priori*, pero Kant se atreve a afirmarlos basado en la necesidad y la riqueza de las verdades matemáticas: en particular, tiene a la geometría euclidiana como la prueba de existencia de semejantes juicios. La existencia de juicios sintéticos *a priori* explica para Kant, la posibilidad de conocimiento objetivo como el que muestra la mecánica de Newton. Es decir, que las disciplinas que tienen posibilidad de ser consideradas ciencia son las que se encargan de estudiar el conocimiento sintético *a priori*.



Hay que hacer aquí una aclaración: todo el edificio trascendental está construido sobre la convicción inamovible de que los axiomas de la geometría euclidiana tienen una certeza apodíctica, es decir, que bajo ninguna circunstancia real o pensada pueden ser falsos, que son universales y necesarios. Que la geometría sea cierta no es una conclusión de la filosofía kantiana, sino una premisa.

> Cuando se cree que las verdades de la geometría euclidiana concuerdan universalmente con la experiencia, se cree también que tal geometría es la única posible, es connatural con la manera de percibir de los seres humanos. Los *Elementos*, el texto de Euclides,

> representa para Kant la ciencia, en estado de derecho, bien constituida, no con juicios analíticos sino sintéticos *a priori*.[70]

Entonces, como la geometría es una verdadera ciencia, y la geometría es el estudio del espacio físico real, para entender las características de toda ciencia, debemos preguntarnos por la naturaleza de espacio.

2.2.3 La naturaleza del espacio: la estética trascendental.

Kant entra a escena en medio del debate que habían tenido Newton y Leibniz sobre la naturaleza del espacio: su carácter absoluto a decir del primero, o su definición relacional, de acuerdo con el segundo. Está en desacuerdo con ambos, como lo formula en el siguiente párrafo:

> El espacio no es cosa alguna objetiva y real, ni sustancia ni accidente ni relación, sino algo subjetivo ideal, que proviene de la naturaleza de la mente de acuerdo con una ley estable, a la manera de un esquema que coordina entre sí absolutamente todo lo que es objeto de sensación externa. Quienes defienden la realidad del espacio, o bien se lo representan como un receptáculo absoluto e inmenso de las cosas posibles, opinión que después de los ingleses agrada a los más de los geómetras, o bien aseveran que es la relación misma de las cosas existentes, la cual se desvanece enteramente si se suprimen las cosas y sólo por las cosas reales es pensado, como después de Leibniz lo declara la mayor parte de los nuestros… los segundos contradicen abiertamente los fenómenos mismos y el intérprete más fiel de todos los fenómenos, la geometría.
>
> Porque, sin traer a colación el patente círculo en que necesariamente se embrollan al definir el espacio, derribada la geometría de la cumbre de su certeza, la arrojan a la lista de aquellas ciencias cuyos principios son empíricos… a los axiomas geométricos no les será inherente sino una universalidad comparativa, la cual se adquiere por inducción, o sea la que se

[70] Encontrado en Guerrero [2004],p.5, y que pertenece a Campos.

> extiende hasta lo que es observado: sólo una necesidad conforme a las leyes establecidas de la naturaleza, ni más precisión que la arbitrariamente fijada, y habrá la esperanza, como ocurre en el dominio de lo empírico, de descubrir algún día un espacio dotado de propiedades primitivas diferentes, o acaso una figura rectilínea de dos líneas.[71]

De esta forma, Kant pone distancia con la concepción absoluta del espacio que sostenía Newton y también con el carácter puramente relacional que le imprimía Leibniz. Su propuesta pone al espacio dentro del sujeto, con lo que logra evitar los extremos en los que caen sus antecesores y, al igual que hizo para sintetizar el debate entre el empirismo y el racionalismo dogmático, logra zanjar la polémica entre la naturaleza relativa o absoluta del espacio.

De acuerdo con Kant la adquisición de conocimiento resulta de la interacción entre los elementos *a priori* del sujeto trascendental con los datos que aporta la experiencia o la intuición. En particular, las condiciones que para Kant deben ser previas y necesarias para el conocimiento son el espacio y el tiempo. A diferencia de las condiciones empíricas, las nociones de espacialidad y temporalidad no provienen de los sentidos, son previos a cualquier experiencia y, en ese sentido, son necesarias y universales. Es decir, no son objetos del conocimiento, sino los elementos que lo posibilitan. La prueba de ello es la existencia de la geometría y de la aritmética.

Del mismo modo que la geometría es la ciencia del espacio, y puede, por la naturaleza de éste, acceder a conocimiento objetivo, el álgebra hará lo propio con el tiempo y juntos se convierten en la piedra angular de la teoría del conocimiento trascendental. Es decir, que basado en su convicción de la certeza inherente a la los postulados matemáticamente demostrados, construye un modelo del conocimiento sobre lo que él considera bases sólidas. A partir de aquí, la filosofía trascendental despega y termina por reconocer en la Razón límites que impiden que la metafísica se convierta en una Ciencia y, como ya hemos dicho, seguirá por estudiar sus preocupaciones éticas y teológicas.

---

[71] Encontrado en Guerrero p.26 y que pertenece a Kant en su *Disertatio* de 1770.

Este segundo giro copernicano rompe con la noción de que la geometría es el estudio de las propiedades de una entidad del mundo físico objetivo y la transforma en un estudio de las características propias del sujeto cognoscente.

2.3 Y ¿qué fue del quinto postulado?

Como era de esperar, en los albores del siglo XIX, el sistema euclidiano no era exactamente aquel que Euclides había escrito y representaba mucho más de lo que su autor había concebido.

En términos formales, la geometría había sufrido una "modernización" con el trabajo de Rene Descartes, quien había introducido herramientas algebraicas a la geometría, y algunos autores modificaron la presentación de la misma para realzar su uso práctico y su capacidad de resolver problemas. Un ejemplo notable y particularmente importante, fue la reformulación del quinto postulado que hizo Proclus, y que después retomó Playfair, misma que ha llegado hasta nuestros días como la formulación estándar de dicho axioma:

"Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una y sólo una *paralela*, una y sólo una línea recta que no intersecta a la primera."

Siguiendo el ejemplo, el geómetra francés Clairaut, critica en el prefacio de sus *Elementos de geometría* (1741), los libros de texto de su tiempo los cuales " siempre empiezan con un gran número de definiciones, postulados, axiomas y principios preliminares que parecen prometer al lector nada más que aridez"[72]. Así, en su libro se omiten o modifican algunas proposiciones de Euclides, en honor a la claridad y practicidad de la exposición. De este modo, el texto contiene muy pocas definiciones y mucho "sentido común". Para él, las "paralelas son [simplemente] líneas que son equidistantes una a la otra"[73].

Sirvan estos ejemplos sobre lo que representaba la geometría en términos formales. Los términos de la relevancia epistémica y simbólica de Euclides fueron ampliamente discutidos en el capítulo anterior.

Sin embargo, a pesar de estas modificaciones, el contenido y los conceptos de la geometría eran los mismos que había plasmado Euclides más de veinte siglos antes. Así también, las dudas sobre la necesidad del quinto postulado. Desde que Proclus sembró la semilla del mal, las paralelas se convirtieron en fuente inagotable de debate, de investigación y de frustración para los matemáticos que se adentraron en su estudio. Si bien es cierto que

[72] Gray [2004] p.25.
[73] Ibid, p.26.

demostrar el quinto postulado puede parecer un ejercicio ocioso, puesto que nunca estuvo en duda la validez del sistema euclidiano, hay que aclarar que, efectivamente, todo desarrollo en matemática pura es ocioso y no por ello carente de importancia[74]. Entre las hordas de matemáticos que se deben haber enfrentado al problema de las paralelas, mencionaré sólo algunos que destacan por su relevancia, pero debemos tener claro que los intentos por probar el quinto postulado que aquí presento no son trabajos aislados, y pertenecen a una larga tradición, un continuo histórico de matemáticos preocupados por un problema tan célebre. Un recuento completo sobre los intentos de demostración del quinto postulado, debería incluir trabajos como los de: Posidonio (siglo I a.n.e.); Gemino (siglo. I a.n.e.); Aganis (S. VI); Gerberto (940-1003); Ibn-al-Haitham (en torno a 965-1039); Omar Khayyam (en torno a 1050-1123); Nasir Eddin (1201-1274); el rabí de Aviñón conocido por Gersónides(1288-1344) o John Wallis (1616-1703). Por consideraciones de claridad en la exposición y espacio he decidido no entrar con detalle en la obra de estos autores.

En primer lugar[75], quiero mencionar a Girolamo Saccheri, profesor jesuita de la universidad de Pavía, quien presenta en su *Euclides depurado de toda macula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la Geometría Universal* (1733) una forma innovadora de enfrentar el problema. Por primera vez, se intenta demostrar la necesidad del quinto postulado haciendo uso de la reducción al absurdo. Aunque su trabajo pasó desapercibido por casi todos sus contemporáneos, en él esté, por primera vez, la formulación que posibilita la aparición de las geometrías euclidianas y, en gran medida, la estrategia que adoptarían los subsecuentes intentos por demostrar el dichoso postulado.

Ahora bien, la demostración por reducción al absurdo supone negar el quinto postulado y llegar a una contradicción con los otros cuatro postulados. Como el postulado sobre las paralelas asegura la existencia y la unicidad de estos objetos, existen dos formas distintas de negarlo: o no existen, o hay más de una paralela. Además, Como afirma Hernández Paricio:

---

74 Basta recordar que la palabra escuela y la palabra ocio tienen una etimología común.

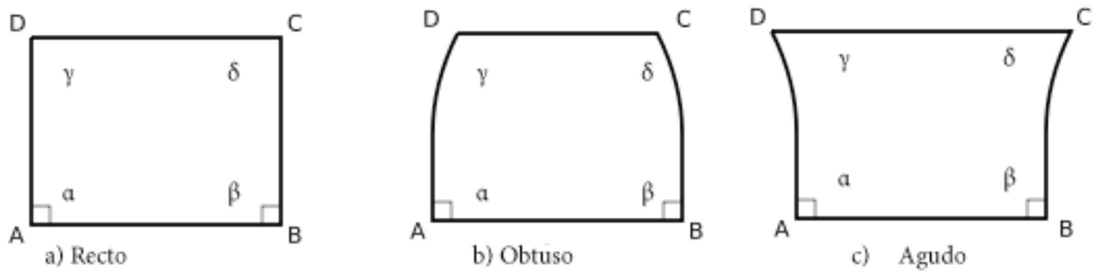
75 Se puede encontrar parte de su trabajo en el texto del Dr. D. Luis Javier Hernández Paricio titulado "Sobre los principios fundamentales de la Geometría. Intentos de demostración del quinto postulado" y en el trabajo de C. José María Sigarreta Almira y Pilar Ruesga Ramos, quienes afirman que :

> "Existieron otros "demostradores" del postulado, ya que son raros los grandes matemáticos que no se hallaron interesado alguna vez en ese problema: Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, Gauss, Jacobi, etc. Todos intentaron "demostrar" el famoso postulado y de hacer luz sobre esa "mancha oscura de la teoría de las paralelas".

> "Existen dos rectas equidistantes"
> "la distancia entre rectas paralelas ni se expande ni se contrae"
> "una línea equidistante a una línea recta es una recta"
> "en un cuadrilátero, si tres de sus ángulos son rectos también lo es cuarto"
> "si un cuadrilátero ABCD tiene ángulos rectos en A y en D y AB es congruente con DC, entonces el ángulo en B es agudo si y sólo si el ángulo en C es obtuso"
> "los ángulos de un cuadrilátero equilátero y equiángulo son rectos"
> "existen dos triángulos similares pero no congruentes"
> "dado un triángulo siempre existen triángulos similares a éste y no congruentes"
> "por un punto que no esté en una recta dada pasa una única paralela"
> "por tres puntos no colineales pasa una única circunferencia"
> "la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos"
>
> Todas estas afirmaciones y otras muchas más en la geometría absoluta son equivalentes al quinto postulado. Es decir, que se puede sustituir el quinto postulado por una cualquiera de ellas. En este caso la afirmación elegida adquiere el carácter de postulado, el quinto postulado abandona su carácter axiomático para convertirse en una proposición que necesita demostración y también serán proposiciones o teoremas el resto de las afirmaciones.[76]

Así, la forma de negar el postulado también depende de la forma de la formulación que se escoja. Saccheri se propone estudiar cuadriláteros ABCD, donde AB es la base, BC=CD y los ángulos α y β son de 90º, conocidos como cuadriláteros de Saccheri[77].

[76] Hernández (2003).
[77] A pesar de que estos cuadriláteros ya habían sido estudiados por Omar Khayyam. La novedad se encuentra en el uso de la demostración indirecta.



Primero prueba que δ = γ y después asume que sólo hay tres casos:

a) δ y γ son ángulos rectos. (δ = γ = 180º)

b) δ y γ son obtusos (δ y γ > 180º)

c) δ y γ son acutángulo (δ y γ <180º)

La primera opción es equivalente al quinto postulado, por lo que Saccheri supone que es falsa. Rápidamente, encuentra una contradicción cuando asume que la segunda opción es verdadera (aunque hay una falacia de petición de principio en el argumento, pues asume la proposición 16 del primero libro de los elementos, probando sin darse cuenta de que los primeros 4 postulados más un postulado que afirma que las líneas rectas se pueden extender indefinidamente implican que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es de 360º). Finalmente intenta encontrar una contradicción asumiendo la tercera posibilidad, pero, a pesar de que encuentra resultados muy extraños, no puede encontrar una contradicción. Después de un ejercicio de rigor matemático, que sólo podemos comparar con aquel de Fermat, pues Saccheri tampoco era un matemático de tiempo completo, concluye su investigación al grito de "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque [ella es] repugnante a la naturaleza de la línea recta"[78] y es probablemente por esta frustración que retraso la publicación de su trabajo hasta el año mismo de su muerte.

Aunque el trabajo de Saccheri fue poco conocido (aunque en Alemania se conservó) es digno de mención porque aquellos resultados extraños que encontró son los primeros teoremas de lo que hoy se conoce como geometría hiperbólica.

[78] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Saccheri.html

Tal vez, el mejor resumen de la situación del quinto postulado a mediados del siglo XVIII está en la tesis doctoral que presentó Greorg Simón Klügel en 1763 , donde se dedicaba a señalar los errores de 28 intentos de demostración distintos. Basado en este trabajo, el matemático Johann Lambert añadió sus propias investigaciones, que se basaban en el estudio de cuadriláteros con al menos tres ángulos rectos, y cuyos resultados lo llevan a concluir que el defecto de un triángulo (es decir, la diferencia que hay entre las suma de los ángulos internos y 180º) es proporcional al área del triángulo. Notó que en una esfera de radio r, un triángulo con ángulos α, β y γ tiene un área $A=r^2(\alpha+\beta+\gamma-180º)$ y dijo "A lo más, puedo concluir que la hipótesis [que nosotros llamamos caso c) en la descripción de Saccheri] ocurriría en el caso de una esfera imaginaria"[79] Lo interesante es que, a diferencia de Saccheri , Lambert empieza a dudar la necesidad del quinto postulado y, como amigo personal de Kant, pudo haber cambiado las opiniones que el filosofo trascendental tenía sobre las característica *a priori* de la geometría. "Pero nunca compartió con Kant las ideas que lo habían llevado a darse cuenta de que el postulado de las paralelas no era seguro. Como Kant no tenía ninguna duda sobre este punto, la reticencia de Lambert le negó a la posteridad un interesante intercambio de visiones"[80]

Poco después, en 1806, el matemático Lagrange dictó una desafortunada conferencia sobre una prueba del quinto postulado, que contenía un argumento circular tan evidente, que la única respuesta de los asistentes fue un doloroso silencio mientras Lagrange abandonaba el recinto. El siguiente en tropezar fue Legendre, quien publicó una prueba que después retiró y sustituyo por otra igualmente equivocada.

En resumidas cuentas, la del quinto postulado es una historia de errores a lo largo de veinte siglo, que descalabró a tanto matemático se le puso enfrente y quitó el sueño a los más grandes pensadores europeos desde los griegos hasta el siglo XIX. Espero que con este breve recuento, baste para mostrar que resolver el problema de las paralelas requería más que talento matemático, requería abandonar ciertas preconcepciones: de la misma forma en la que Kepler tuvo que deshechar su idea de que los círculos representaban la perfección, así también los matemáticos necesitarían abandonar la idea de que Euclides es la representación perfecta del espacio. Ése es el panorama cuando entramos al siglo XIX.

[79] Grey [2004], p. 42.
[80] Ibid.

Capitulo 3
La revolución silenciosa

Para muchos historiadores, el siglo XIX largo comienza entre el humo y el fuego de la Toma de la Bastilla en 1789, iniciando un convulso periodo que terminará con la cabeza del Rey, que gobernaba por derecho divino, en una cesta[81]. Sin embargo, para nuestra historia el siglo XIX comienza unos años más tarde, con una escena menos dramática pero igualmente revolucionaria, que sucede entre la tiendas de campaña del ejercito napoleónico. Ahí, en medio del despliegue militar que tiene intenciones de conquistar Europa, Napoleón se da cita con Laplace para discutir el libro sobre mecánica celeste que el último había regalado al emperador. Se podría pensar que el regalo era simplemente un gesto simbólico de aprecio hacia el representante del poder, pero debemos considerar que Napoleón era en realidad un buen matemático, que incluso tiene un teorema que lleva su nombre (que se conoce poco por la inutilidad de su resultado), por lo que su lectura del libro no era superficial ni ingenua. Cuenta la leyenda[82], que cuando Laplace se reúne con él para recibir comentarios sobre el texto, Napoleón le comenta extrañado que no pudo encontrar ninguna mención sobre Dios en el texto. "[Dios] no fue una hipótesis necesaria" fue la respuesta lacónica del científico francés. Simbólicamente, la sentencia laplaciana tiene la misma naturaleza parricida que la cabeza del rey en la cesta, pues aunque no niega la existencia de Dios, reduce su influencia en la mecánica del Universo a una mera cuestión de gustos: es posible que siga operando, pero no es necesario considerar su operación para explicar los fenómenos. "No es una hipótesis necesaria" sintetiza, como veremos a continuación, el sentido de época de la Europa del siglo XIX: su profunda confianza en la Razón Pura kantiana; la inamovible convicción de que el Hombre, a través de la ciencia y la matemática, puede conocer todo lo que hay de certero en el mundo; el reduccionismo mecanicista y el avance tecnológico como medidas de "progreso" histórico. "No es una hipótesis necesaria" será causa y consecuencia de la revolución que ha de ocurrir en el seno del pensamiento matemático, ahí donde creíamos tener la mayor certeza y la prueba filosófica de la posibilidad de una ciencia que accede a "verdades" inmutables, será pues, el principio del fin de la geometría euclidiana.

---

[81] Es curioso notar, de que de los muchos cortesanos que fueron juzgados, uno de los pocos en salvarse de la guillotina fue Cauchy, probando que los revolucionarios eran sanguinarios, pero no imbéciles ni incultos.
[82] De Morgan [1872], p. 5.

3.1 Los Bolyai y la traición de las paralelas.

La primavera del año 1832, fue para Janos Bolyai, la más dura de su vida[83]. Desde que había abierto la carta de su padre contándole las últimas noticias de la publicación de su reciente libro, *Tentamen juventutem studiosam in Elementa Matheosis purae*(1831), una mezcla entre alegría incontenible y profundo enojo se había instalado en su cuerpo, y no le permitía pensar. Él, que por su trayectoria y su esfuerzo parecía destinado a recibir el crédito de resolver uno de los problemas más antiguos de la matemática, había sido traicionado, despojado de una herencia milenaria, probablemente, por... por Farkas, su propio padre. Él, que era un hombre de temperamento feroz, que había luchado y ganado trece duelos seguidos, era capaz de una ira tan grande, que tomó la determinación de no volverse a comunicar con su padre nunca más. Pasaron casi diez años antes de que rompiera esa promesa.

La historia de ese enojo, había empezado muchos años antes, incluso antes que el nacimiento de Janos. Se inicia en Göttingen, alrededor del año 1796[84]. Por esas épocas, su padre, matemático de profesión, vivía en la ciudad alemana y atendía puntualmente a las lecciones que dictaba Abraham Gotthelf Kästner. Fue ahí que conoció al causante de tanto enojo, un matemático alemán, compañero de estudios de Farkas.

La amistad que se formó entre ambos en los dos años que convivieron, pues en 1798 Farkas volvió a Transilvania, siguió ininterrumpida por medio de cartas muchos años y, entre anécdotas de la vida cotidiana, intercambios académicos e historias familiares, el alemán siempre encontraba espacio para preguntar sobre las investigaciones en un tema que apasionaba a ambos por igual: el problema de las paralelas. Producto de este intercambio, sabemos que Farkas envió el producto de tres años de trabajo sobre el afamado problema a su amigo alemán, para descubrir, a vuelta de correo, que los fundamentos mismos del trabajo tenían una falla crucial. Si por algo se distinguía su colega, pensaba Farkas, era por su implacable rigor matemático.

Ahora, en la fatídica primavera de 1832, Janos no podía dejar de pensar, que todo, toda su vida, había sido una trampa que se acababa de cerrar sobre él. Recordaba cómo, en la infancia, su padre le leía y le explicaba cada una de las proposiciones y demostraciones de ese libro fascinante que se titulaba los *Elementos*. Tanto le gustaba el estudio, que, una vez acabados los seis tomos y el *Algebra* (también de Euclides), convenció a su padre de que le permitiera

---

[83] Espero que el lector me perdone esta licencia literaria que no tiene otro objetivo que el de exponer esta parte de la historia de forma más amena.

[84] Janos Bolyai nació en 1802.

asistir a clases en la Universidad [el college], donde además de aprender, enseñaba cálculo a sus compañeros. En aquel momento tenía doce años.

Había estudiado incansablemente toda su vida. Recordaba sus estudios en la Academia Real de Ingeniería en Viena, entre 1818 y 1823. En particular, ahora recordaba con toda precisión una imagen que creía haber olvidado. En ella un compañero suyo de la academia, Carl Szász, le sugería una definición de las paralelas muy innovadora, la definición que Janos había usado en el *Apéndice*. Efectivamente, y sin duda influenciado por el padre, el joven Bolyai también estaba interesado en el estudio de quinto postulado de Euclides. Fue en esa época, en 1820 para ser más preciso, que Janos empezó a sospechar que tantos intentos fallidos por probar el quinto postulado podían deberse a una causa más simple: no era *necesariamente* verdadero. Cuando le comunica esta intuición a su padre, Farkas contesta con una de las poesías más trágicas y melancólicas que se hayan escrito sobre matemáticas, de lo que yo puedo recordar:

> No debes intentar esta aproximación a las paralelas. Conozco este camino hasta su mismo final. Yo he atravesado esta noche sin fondo, que ha extinguido toda luz y alegría de mi vida. Te ruego, abandona la ciencia de las paralelas... Yo pensé que me sacrificaría en honor a la verdad. Estaba listo para convertirme en un mártir que removería la falla de la geometría y se la devolvería purificada a la humanidad. Yo he consumado monstruosas, enormes tareas; mis creaciones son mucho mejores que las de otros, y aun así no he conseguido completa satisfacción... Me di vuelta cuando vi que ningún hombre puede llegar al fondo de esta noche. Aprende de mi ejemplo: yo quería saber sobre las paralelas, sigo ignorante, esto se ha llevado las flores de mi vida y me ha quitado todo el tiempo.

Y, continúa:

> Debo admitir que no espero nada de las digresiones de tus líneas. Me parece que ya he estado en estas regiones; que he viajado a través de todos los arrecifes de este Mar Muerto infernal y siempre he regresado con el mástil roto y las velas desgarradas. La ruina de mi disposición y mí caída continúan hasta la fecha.

> Arriesgué imprudentemente mi vida - aut Caesaar aut nihil [O Cesar o nada].

Afortunadamente, el joven Bolyai no hizo demasiado caso y el 3 de noviembre de 1823, escribió contando sobre su progreso, una carta que contiene la cita más famosa de Janos:

> Estoy determinado a publicar mi trabajo sobre las paralelas, tan pronto como pueda ponerlo en orden, completarlo, y aparezca una oportunidad. Todavía no he hecho el descubrimiento, pero el camino que sigo es casi certero para llegar a mi objetivo, suponiendo que tal objetivo es posible. Todavía no lo tengo, pero he encontrado cosas tan magníficas que estaba anonadado. Sería una pena que estas cosas se perdieran como tú, querido padre, deberás admitir una vez que las veas. Todo lo que puedo decir ahora es que he creado un mundo nuevo y diferente, a partir de la nada. Todo lo que te he enviado hasta ahora es un castillo de naipes comparado con una torre.

Janos recordaba, ahora con dolor, que al ver que su padre no podía convencerlo de abandonar ese Mar Muerto infernal, le había aconsejado darse prisa en publicar sus resultados, pues "las ideas pueden pasar fácilmente a otra persona que entonces las publica [y] las cosas ciertas florecen al mismo tiempo en distintos lugares de la misma forma que todas las violetas ven la luz al comenzar la primavera." Le advertía, además, que en la guerra de las matemáticas, la eminencia se le otorga al que llega primero al resultado. ¡Cuanta hipocresía había en esa carta! Primero lo apresura para publicar y luego, de 1825 a 1829, lo desanima con objeciones muy severas sobre la existencia de una constante arbitraria en algunos de sus resultados. Finalmente, aunque seguían en desacuerdo, deciden publicar el trabajo en un apéndice del compendio sobre geometría que había estado preparando Farkas (el *Tentament*). El libro tuvo una recepción fría, por decir mucho, pero entre sus primeros lectores estaba aquel amigo alemán, que para estas fechas era toda una eminencia en el ámbito matemático y su opinión sobre el apéndice podía influir ampliamente en la difusión de la obra, el trabajo de vida de Janos Bolyai.

La decepción, la ira y la depresión llegaron con la respuesta que recibió Farkas de Alemania:

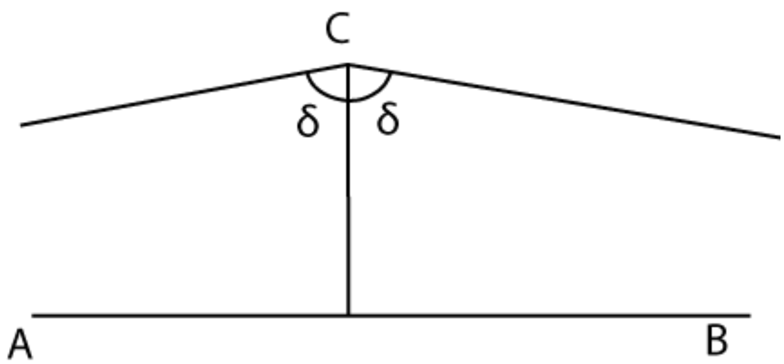
> Si empiezo por decir que no puedo alabar este trabajo, por supuesto quedarías desconcertado un momento: pero no puedo hacer otra cosa; alabarlo implicaría alabarme; porque el contenido íntegro del trabajo, el camino que ha tomado tu hijo, los resultados a los que es llevado, coinciden casi exactamente con las meditaciones que han ocupado mi mente por treinta o treinta y cinco años. En este sentido, me encuentro sorprendido al extremo.
>
> Mi intención era, respecto a mi propio trabajo, del cual muy poco ha sido publicado hasta ahora, no permitir que se conociera durante mi vida. La mayoría de la gente no tiene contexto para entender nuestras conclusiones y sólo he encontrado unos pocos que tienen interés particular en lo que les he comunicado. Para entender estas cosas, uno requiere tener un fino sentido de lo que es necesario, y sobre esto la mayoría están confundidos. Por otra parte, era mi plan ponerlo todo en papel eventualmente, para que al menos no pereciera conmigo.
>
> Así que estoy muy sorprendido de haber sido absuelto de este esfuerzo, y alegrísimo de que resulte ser el hijo de mi viejo amigo quien me libera de forma tan admirable.
>
> Carl Friedrich Gauss

Era tremendamente halagador haber coincidido con los descubrimientos del más grande matemático de la época, pero tremendamente decepcionante que éste, que ya tenía todo el prestigio y la fama que un hombre podía querer, reclamara como propio uno de los descubrimientos más importantes de la historia de la matemática. Janos estaba convencido de que, a sus espaldas, su padre había estado dándole información a Gauss, para que éste se adueñara de su trabajo. Nunca más publicó una investigación.

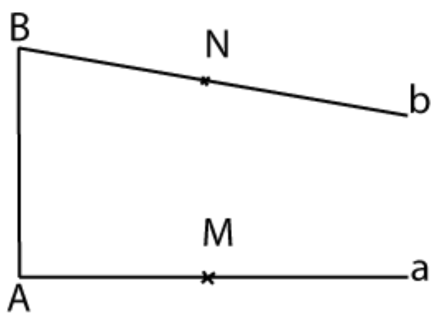
3.1.2 Breves notas sobre el trabajo de Bolyai.

Su trabajo suponía, como ya hemos dicho, redefinir la noción de paralelismo. La idea es:

Dada una recta AB, y un punto fuera de ella C, existen dos rectas que no intersectan a la primera, pero que cualquier recta por debajo de ellas (con un ángulo menor a δ) si intersecta a AB. Estas son llamadas *paralelas asintóticas.*[85]



A continuación, establece algunas propiedades de las paralelas bajo la nueva definición y demuestra que si **a** y **b** son paralelas y **A** es un punto fijo en **a**, entonces existe un único punto **B** en **b**, tal que los ángulos MAB=NBA.



Ahora, piensa en la línea **a**, con un punto fijo en ella **A**, y en todos los planos que contienen a **a,** construye las paralelas de **a.** Ahora, denota **L** a la curva formado por todos los puntos $\mathbf{B}^*$ que están en esas paralelas y cumplen con que $MAB^*=NB^*A$. Finalmente, considera la superficie **F** que resulta de rotar **L** con **a** como eje de giro.

Un resultado central, es que si uno considera a las curvas **L** como "líneas", entonces la geometría de la superficie **F** es euclidiana. Así, siempre que Bolyai necesita resolver un

[85] En el caso euclidiano, δ=90º y las dos paralelas asintóticas son la misma. Sin embargo, Janos no está intentando probar el quinto postulado sino, probar que es posible una geometría donde el dicho postulado no se cumple.

problema en esta nueva geometría, puede traducirlo al lenguaje euclidiano. También significa que en un espacio donde no se cumple el quinto postulado, siempre hay una *superficie* en la que la geometría inducida es euclidiana.

Después se dedica a encontrar las relaciones trigonométricas entre las "líneas" de esta nueva geometría (éstas son las que contienen constantes arbitrarias) y la relación entre el ángulo de paralelismo (δ en la figura 3.1) y la altura de la perpendicular (y en la figura 3.1) Encontró el equivalente al Teorema de Pitágoras en ese nuevo espacio y demostró que en el caso en el que $\delta = 90^o$ se reduce al Teorema de Pitágoras Euclidiano. Además, encuentra una forma de "cuadrar el círculo" en la nueva geometría.[86] Por todo ello, es uno de los autores a los que se reconoce como creador de la geometría hiperbólica.

3.2 Gauss y los Boecios

Por supuesto, la pregunta que nos queda es ¿qué sabía realmente Gauss de esta nueva geometría y cómo podemos saber que lo sabía y que no se estaba adjudicando un mérito ajeno? Como él mismo se prometió, sus publicaciones en este tema son escasas (por no decir, prácticamente nulas) y por tanto, hay pocas fuentes de corte estrictamente académico sobre el desarrollo de Gauss de las geometrías. Tenemos, en cambio, más de una quincena de cartas personales donde Gauss deja entrever que su entendimiento del problema del quinto postulado era bastante profundo, y esas cartas representan nuestra primera fuente de investigación. Existen además, testimonios de colaboradores cercanos como Sartorius von Waltershausen, o la controvertida historia de las mediciones que hizo Gauss entre los picos de los montes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken[87] que ayudan a completar la imagen de lo que sabía el célebre alemán, pero que no revisaré en este trabajo.

Efectivamente, ya en 1799, en la primera carta que se conocen de su comunicación con Farkas Bolyai, Gauss contesta a la pretensión de su amigo de haber hecho progresos en la teoría de las paralelas: "Sólo que, el camino que he escogido no lleva a la meta que uno busca, y que tú me aseguras que has conseguido, sino más bien hace a las verdades de la geometría dudosas"[88]. Así también en las cartas que escribe a Gerling, Olbers, Taurinus y Bessel, y en apuntes que hace Schumacher sobre Gauss, encontramos suficiente evidencia para asegurar que: "el primero que obtuvo un concepto claro sobre una Geometría distinta a la de Euclides

---

[86] La "cuadratura del círculo", recordaran, es otro de los problemas históricamente célebres, y su dificultad radica, ahora lo entendemos, en que no tiene solución en el espacio Euclidiano.
[87] Ferreiros [2005]
[88] Grey [2004] p. 44.

fue Karl Friedrich Gauss [quien] estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y después de muchas reflexiones formuló una nueva Geometría que llamó no euclidiana y comenzó su desarrollo". Además, "se pudo fijar como fecha de partida de sus meditaciones sobre la teoría de las paralelas el año 1792"[89].

Entre las múltiples referencias que Gauss hace de la posibilidad de una geometría distinta a la de Euclides, me limitaré a citar tres[90], que me parece que pueden ayudar a establecer algunos hechos reveladores.

Para empezar, el 11 de abril de 1816, Gauss le contesta una carta a Gerling, un estudiante de Göttingen que le preguntaba sobre la teoría de Legendre de las paralelas, diciendo:

> Es fácil mostrar que si la geometría de Euclides no es verdadera entonces no hay figuras similares: los ángulos de un triángulo equilátero dependen del tamaño de los lados, en lo que no encuentro nada absurdo. Entonces el ángulo es una función del lado, y el lado una función del ángulo, una función en la que naturalmente aparece una constante lineal. Parece paradójica la existencia de una constante lineal *a priori*, pero en ello no encuentro ninguna contradicción. Sería incluso deseable que la geometría de Euclides no fuera verdadera, pues entonces tendríamos una medida general *a priori*, por ejemplo, uno podría escoger como unidad de medida del espacio, el tamaño de un lado de un triángulo equilátero de ángulo igual a 59º 59'59".9999

Por la claridad y la autoridad con la que escribe, es evidente que Gauss conoce el tema a profundidad. Sus reflexiones son puntuales, incisivas; de forma velada se refiere a las pruebas por *reductio ad absurdum*, a la teoría kantiana de la geometría, a la teoría de la medida universal; sus meditaciones no son especulaciones filosóficas sino ejercicios matemáticos.

Ese mismo año, Gauss publica en los "Scholarly Notices of Goettingen" una reseña de los artículos de J.C. Schwab. y Matthias Metternich, quienes intentan justificar la geometría euclidiana, filosóficamente el primero, y más formalmente el segundo. En la reseña, se pueden

[89] Sigarreta y Resgua [2004] p 6-7.
[90] Tomados de Gauss, *Werke*, Volumen VIII, según la traducción al inglés de Stan Burris, en http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/noneucl.pdf.

encontrar las mismas características de la respuesta de Gauss: asertividad, conocimiento de las implicaciones filosóficas y una profunda *intuición* matemática.

El primer párrafo de dicha carta dice:

> Hay pocos temas en matemáticas en el que se haya escrito tanto como de los huecos que ocurren en el fundamento de la teoría de las líneas paralelas en el inicio de la geometría. Rara vez pasa un año sin un nuevo intento por llenar estos huecos y sin poder decir, siendo honestos y abiertos, que hayamos en modo alguno ido más lejos de lo que Euclides estaba hace 2000 años. Admitirlo de esta manera directa y propia parece más digna del honor de la ciencia que los intentos frívolos por esconder los huecos que uno no puede llenar con una indefendible telaraña de aparentes pruebas

Efectivamente, y como ya hemos visto a lo largo de este trabajo, la teoría de las paralelas está en boca de todos, y para este momento de la historia es un "punto gordiano" (como Gauss mismo lo llama) de la geometría. Pero el llamado "Príncipe de las Matemáticas", ya está viendo más lejos. En sus ratos de ocio, en periodos disconexos a lo largo de su vida, o tal vez constantemente de forma subconsciente, Gauss está calculando la posibilidad de una geometría que niega el quinto postulado y es consistente.

Sigamos. En 1817, Gauss le escribe al astrónomo Wilhelm Olbers para decir: "Estoy cada vez más y más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada... Tal vez sólo en otra vida obtendremos otra intuición sobre la naturaleza del espacio, que no podemos obtener nosotros ahora. Hasta entonces no debemos ubicar a la geometría con la aritmética, que es puramente *a priori*, sino en el mismo rango que la mecánica."[91] Es increíble la cantidad de referencias y la profundidad de lo que reflexiona en un párrafo tan corto. Resulta evidente que Gauss está empapado del tema y sólo me queda la duda de cómo imagina él esa "otra vida".

Unos años más tarde, en 1829, le escribe a Bessel una carta donde se encuentra una famosa justificación de Gauss:

> Mientras tanto es probable que pase mucho tiempo antes de que me ponga a preparar mi muy extensa investigación en el tema [Geometrías No Euclidianas] para su publicación; tal vez nunca

[91] Grey [2004],p. 67.

ocurra en durante mi vida pues temo el llanto de los Boecios si yo
diera voz a mis ideas.

Es posible que para 1830, Gauss fuera el único con plena conciencia de las implicaciones de las nuevas geometrías y que la profundidad emocional, casi existencial, de este descubrimiento sea la única forma de entender la contradictoria imagen que Gauss encarna: "El Príncipe de las Matemáticas" asustado por la tribu de idiotas[92]. Si bien es cierto que a menudo las ideas innovadoras o revolucionarias pueden parecer inverosímiles o idiotas en el contexto en el que surgen, Gauss tenía méritos académicos más que suficientes para proponer una geometría nueva sin pasar por charlatán. Es probable que consciente de las implicaciones filosóficas de la posibilidad de otra geometría, Gauss prefiriera esquivar el debate para poder seguir con su verdadera labor dentro del campo mismo de la matemática. Sirva su reticencia a discutir el tema para establecer, ya sin lugar a dudas, que la institución euclidiana ejercía sobre el pensamiento europeo un dominio sólo comparable, y en algún sentido superado, con aquel que tenía la iglesia católica sobre el quehacer intelectual durante la Edad Media.

Por si quedaba alguna duda sobre el conocimiento que tenía Gauss del tema, la Sociedad Científica de Göttingen, publicó de manera póstuma dos breves sinopsis que contienen, *grosso modo*, las ideas formales de Gauss en torno a la creación de una nueva geometría.[93]

3.3 Lobachevsky

De esta manera queda aclarada la inocencia de Farkas Bolyai en el terrible malentendido en el que la geometría hiperbólica lo puso; un malentendido que le costo años de relación con su hijo, pero ahí no termina su historia. En 1844 se enteró por un amigo que tenía en común con Gauss, de la existencia de un trabajo independiente[94] sobre esta nueva geometría, al parece de un autor ruso, una de las "violetas" que predecía Farkas. En octubre de 1848 obtuvo una copia del trabajo, y la discutió con su hijo, con quien había retomado comunicación. Al parecer planeaban publicar una réplica, pero nunca sucedió. Algo los debe haber desanimado. En la opinión de Grey : "Habían descubierto una nueva geometría, uno de los más importantes descubrimientos jamás hechos, y el mundo simplemente los ignoró"[95].

---

[92] Los Boecios son una etnia que los griegos consideraban particularmente idiota.
[93] Contenido también en de Werke, Volumen VIII, pero este traducido al español por Albis y Alvarez [1983]
[94] Más adelante veremos que esto se ha puesto en duda.
[95] Grey[2004] p.81

El autor ruso del trabajo sobre geometría que leyeron los Bolyai fue, Nicolai Lobachevsky[96]y me disculpo de antemano por la injusticia que he cometido, por un criterio narrativo, al dejar a mi tocayo al final de este capítulo del nacimiento de la geometría hiperbólica. Una injusticia ciertamente, pues fue él el primero en publicar formalmente (en 1829) un teorema de la nueva geometría y sin embargo, por llegar último a estas páginas, su contribución a los elementos conceptuales de nuestra historia es menor. En algún sentido, este retraso para entrar en el debate sobre la geometría, debido en parte al idioma en el que escribía y por su aparente falta de talento como escritor (a decir de Grey), también marcó su carrera académica.

Hijo de una familia de escasos recursos, huérfano desde temprana edad, Nicolai se formó en las instituciones públicas que operaban en Kazan, en la Siberia Occidental, y que eran producto de las reformas que el zar Alejandro I había llevado a cabo entre 1800 y 1804. Recibió la formación básica en el *Gymnasium* y cuando se graduó, en 1807, entró como estudiante *libre* a la Universidad de Kazán. Ahí, desde los primeros cursos, Lobachevsky destacó en los cursos de física, matemáticas y astronomía a los que atendía. En la literatura sobre su vida siempre aparece la figura de Martin Bartels (1769 - 1833) como mentor y guía del joven Nicolai hacia el terreno de la matemática pura. En parte es una referencia obligada puesto que el célebre maestro alemán tenía una estrecha relación con Gauss. En algunos trabajos se ha intentado sugerir que también en los descubrimientos de Lobachevsky sobre geometría hiperbólica están influenciados por las investigaciones de Gauss, aunque ninguno de los argumentos parece contundente[97].

Además de sus méritos como alumno, el joven matemático ruso se ganó rápidamente la fama de ser un excelente expositor, claro y conciso. De este modo, una vez que se graduó de la Universidad, comenzó a dar clases en la misma, al tiempo en que revisaba la construcción de nuevos edificios de aulas y laboratorios. Desde 1814, en que ingresó como profesor, hasta 1846 en que se retiró, Lobachevsky trabajó incansablemente para la Universidad, llegando a ocupar en 1827 el puesto de rector, mismo que mantendría durante 19 años.

Sobre sus aportaciones matemáticas encontramos:

---

[96] Nacido el 1 de diciembre de 1792 y fallecido el 24 de febrero de 1856

[97] Sobre el tema se puede revisar:

G E Izotov, *Legends and reality in Lobachevski's biography*, *Priroda* (7) (1993), 4-11.

B A Rosenfeld, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

o en *wikipedia.com* bajo la voz: Nicolai Lobachevsky

> Su mayor trabajo, *Geometriya* completado en 1823, no fue publicado en su forma original sino hasta 1909. El 11 de febrero de 1826, en una sesión del Departamento de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad de Kazán, Lobachevsky pidió que su trabajo sobre una nueva geometría fuera escuchado y que su artículo *A concise outline of the foundations of geometry* fuera enviada a los réferis. El texto de ese artículo no ha sobrevivido pero las ideas fueron incorporadas, tal vez en una versión modificada, en la primera publicación de Lobachevsky sobre geometría hiperbólica. Él publicó este trabajo en geometrías no euclidianas, el primer texto publicado sobre el tema del que tenemos noticia, en 1929. Fue publicado en el Kazan Messenger pero rechazado por Ostrogradski, cuando fue enviado para su publicación por la Academia de Ciencias de San Petersburgo [98]

Unos años más tarde, en 1834, Lobachevsky encuentra una aproximación para encontrar raíces de ecuaciones algebraicas, conocido como el método de Dandelin-Gräffe. Efectivamente, y casi como una broma de la historia, este desarrollo también fue realizado por tres matemáticos de forma independiente (de ahí el nombre)[99], en un periodo muy corto de tiempo. Semejante coincidencia parece apuntar al hecho de que, en vista de que los enunciados matemáticos del álgebra son sintéticos *a priori*, en el sentido más kantiano, la aparición simultáea de resultados que provienen de investigaciones independientes, pero que apuntan en el mismo sentido, no debería sorprendernos, sino por el contrario, ser vista como un acontecimiento común. Siguiendo este argumento, la aparición de las geometrías no euclidianas pueden parecer una *necesidad histórica*; un descubrimiento al que habríamos llegado, independientemente de Gauss, o Bolyai, o Lobachevsky. Y efectivamente, este argumento, parece convincente para muchos.

En 1835, el matemático ruso escribe la siguiente reflexión:

> La infructuosidad de las tentativas, hechas desde la época de Euclides por espacio de dos milenios despertó en mí la sospecha

[98] School of Mathematical and Computational Sciences
de la University of St Andrews. Consultado en http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
[99] Al parecer, sólo en Rusia se le llama método Lobachevsky.

> de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su conformación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas... [100]

Es, como hemos visto, un pensamiento que está circulando en la mente europea, pero en esta cita está un elemento importante y que no podemos pasar por alto: el hecho de que han pasado 20 siglos. ¿Por qué, de todos los contextos en los que se trabajó el problema de las paralelas, de todos los hombres que lo enfrentaron y de todos los métodos, fue precisamente el pensamiento europeo ilustrado, la reducción al absurdo y el siglo XIX, los que por fin encontraron la salida del laberinto? Una respuesta posible, como ya dije, es que la matemática avanza, por sus características propias, a un paso lento pero seguro hacia resultados verdaderos, que nos han estado esperando desde el principio del tiempo en su forma de certezas sintéticas *a priori*, y que estos resultados habrán de surgir, de manera natural, cuando nuestros conocimientos tengan la madurez suficiente. Semejante hipótesis teleológica resulta seductora para mantener la visión colectiva de que el conocimiento matemático tiene un estatus privilegiado, pero en este caso, como veremos, no resulta satisfactoria. El acto de increíble irreverencia implícito en el acto de dudar la necesidad lógica del quinto postulado, no se puede entender como una evolución necesaria de la matemática. Las geometrías no euclidianas constituyen una revolución conceptual cuyo único precedente comparable es la mecánica y que, definitivamente representa una transición de fase en la Historia de la Matemática y de las Ideas. Pretender que estos periodos de revolución[101] son parte intrínseca de la Historia, etapas necesarias para llegar a uno estado privilegiado al final del Tiempo, es exactamente la visión decimonónica de la ciencia y es justamente la visión que la aparición de las geometrías no euclidianas parecen desmentir. Así, se me ocurre que el surgimiento de las mismas, en tres contextos distintos, de forma simultánea e independiente, no debe ser pasada por alto y la debemos reconocer como el primer ejemplo dramático de la contradicción inherente de la Razón Ilustrada: en su afán por librar al conocimiento de mitos, debe también acabar con el mito mismo de que por este proceso se puede alcanzar la certeza[102]. Sólo con la confianza exacerbada en esa Razón que Kant describía, aquella confianza que caracteriza al

---

[100] Bonola, [1955], p.97.

[101] La referencia la trabajo de Kuhn es intencional

[102] No es el momento ni el lugar para discutir esta idea, pero, no puedo dejar de mencionar que no es mía, y que se encuentra ampliamente discutida en la "Dialéctica de la Ilustración" de Horkheimer y Adorno.

científico europeo de la época, pueden atreverse a desafiar los principios mismos de Razón kantiana: dudar de la existencia de enunciados sintéticos *a priori*. No sólo Dios no es una hipótesis necesaria, el quinto postulado de Euclides tampoco.

Entre el primer intento por demostrar la necesidad de la geometría por *reductio ad absurdum* y "el mundo nuevo" de Bolyai, la única diferencia real es de actitud: el último confía en que, el hecho de que no aparezcan contradicciones es la puerta de entrada a una nueva geometría, no una aberración contra el orden perfecto de la naturaleza.

3.4 De las variedades a los modelos: la onda de choque

De este modo, con el ensayo de Lobachevsky de 1826, el apéndice del *Tentament* de Janos Bolyai en 1831, y los apuntes que Gauss escribe en la misma época (pero que no verán la luz sino hasta 1856, un año después de su muerte) queda inaugurada una nueva geometría. Éste es, sin embargo, un enunciado que sólo tiene sentido ahora, *a posteriori*, pues con los trabajos antes citados quedan problemas importantes que resolver.

Primero,¿qué significa una nueva geometría?. ¿Por qué las nuevas reglas del juego, imaginadas por Gauss y propuestas por Bolyai y Lobachevsky, tienen el derecho de llamarse "geometría"? Llegados a este punto: ¿qué exactamente es "geometría"? .

Segundo: suponiendo que la nueva teoría tenga derecho a llamarse geometría, ¿cuantas de estas hay?. ¿Sólo dos? ¿Cinco, como los sólidos platónicos? ¿Cuántas?

Y, tercero: ¿Cuál es la geometría de este Universo?

Como ya he dicho, los tres autores originales de la nueva geometría, terminaron sus días sin recibir mayor crédito por sus investigaciones sobre tan elusivo tema. Gauss murió en 1855, Lovachevsky en 1856 al igual que Farkas Bolyai, y su hijo Janos en 1860. Sin embargo, la imparable onda de choque de las geometrías no euclidianas, el estruendo que causaba la caída del mayor edificio matemático de la historia, no se hizo esperar demasiado.

Ya en 1855, Gauss tuvo oportunidad de examinar la ponencia de un brillante estudiante suyo, de nombre Bernhard Riemann, que presentó en la Facultad de Filosofía (pues todavía en esa época no se había hecho la triste división entre el quehacer matemático y el filosófico) para poder obtener una plaza de docente[103]. Según la costumbre, Riemann preparó tres ponencias, dos sobre física y una sobre los fundamentos de la geometría y Gauss debía decidir cual quería escuchar. ¿Adivinan cúal fue el tema que despertó su curiosidad? Riemann en su ponencia rebasó cualquier expectativa: generalizando las nociones de distancia y "línea

[103] Gauss lo había recomendado para un puesto en Götinggen, para lo que debía preparar su "Habilitación".

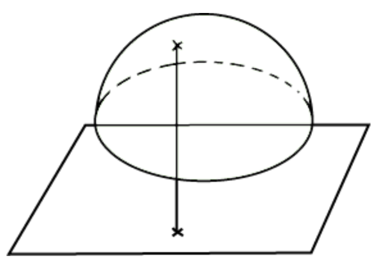
recta", así como el concepto que el propio Gauss había desarrollado de curvatura, había logrado definir propiedades geométricas en variedades abstractas n-dimensionales, sintetizadas en un tensor de curvatura. Había mostrado, además, que la geometría natural de la esfera, definiendo a los círculos máximos como las nuevas "líneas rectas" o geodésicas, era una geometría donde no se cumplía el quinto postulado: no se puede construir ninguna paralela en ella. "De regreso a una reunión de la facultad, [Gauss] habló con el mayor aprecio y un raro entusiasmo a Wilhelm Weber acerca de la profundidad de los pensamientos que había presentado Riemann."[104] Efectivamente, la forma de Bernhard de aproximarse a la geometría era radicalmente distinta a la clásica, a aquella que suponía que se podía partir de unos conceptos difusos pero muy intuitivos (línea, punto, círculo...) para construir la teoría; para él, las únicas nociones geométricas necesarias eran las de punto y distancia. De este modo, puede concebir a la geometría como una serie de reglas que se pueden aplicar a un sinnúmero de conjuntos, siempre y cuando en ellos exista una definición precisa de la noción fundamental de "distancia". Con su trabajo, se concluye que "hay una infinidad de geometrías en cada dimensión, aunque no demasiadas del tipo simple, las de curvatura constante. Entre estas geometrías, la de Euclides no es en ningún sentido fundamental. Es sólo una de muchas."[105] Esto resuelve de un plumazo el segundo problema pendiente que había dejado la geometría hiperbólica, pero, curiosamente, la aproximación riemanniana a la geometría era sólo eso, una actitud osada. Se ha dicho, en más de una ocasión que este trabajo de Riemann tiene muchas imprecisiones y no será sino hasta el siglo XX que se den definiciones formales de una variedad riemanniana. En su época no había ninguna garantía de que las nuevas ideas geométricas no terminarían a la larga a producir una contradicción insalvable que las probara inútiles. A la muerte de Riemann en 1866, debido a una tuberculosis que lo había llevado al Sur de Italia en busca de mejores climas, no existía aún una prueba de consistencia de las nuevas geometrías ni, para el caso, de la geometría euclidiana (aunque para esta última bastaba su antigüedad para convencer de su consitencia). Y fue precisamente a través de los amigos italianos que lo habían acogido, que las ideas de Riemann llegaron a oídos de Eugenio Beltrami.

Beltrami es el encargado de dar el golpe final a la geometría euclidiana y destronarla de su hegemonía en la matemática pura; será el que, por fin, termine con la idea de que la

[104] Monastyrsky, [1987].
[105] Grey, [2004], p.87.

descripción que Euclides hizo, 2500 años antes, sobre la naturaleza del espacio, no es una certeza *a priori* sino una posibilidad. En 1868, Beltrami publica el trabajo que cierra, desde el punto de vista conceptual, la historia que he venido contando. "Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante" (Teoría fundamental del espacio de curvatura constante) sintetiza los trabajos de Riemann en geometría diferencial con los atentados al quinto postulado de Lobachevsky y Bolyai, al tiempo que comprometía la consistencia de la geometría hiperbólica con la consistencia del sistema euclidiano vía un audaz paso de abstracción lógica.

Sus ideas surgen, de su trabajo traduciendo las obras de Gauss sobre el mapeo "geodésico". Esta famosa regla de asociación entre los puntos de un hemisferio a un plano, tiene la caprichosa cualidad de que los círculos máximos del hemisferio (i.e. las trayectorias más cortas entre puntos en esa superficie, o geodésicas de esa superficie) quedan mapeadas en líneas rectas (geodésicas del plano). La noción de distancia queda alterada, pero es posible escribir una regla de asociación entre la "métrica" en la esfera y la resultante en el plano. Dicha función involucra el cuadrado del radio de la esfera original.



Beltrami se pregunta si es posible realizar un mapeo similar, no ya para la esfera que conocemos, sino para aquella cuyo radio es negativo, -R. Ya que la función que mide la "deformación" de la distancia involucra no al radio, sino a su cuadrado, es interesante preguntarse por la raiz negativa. ¿Pero qué es una "esfera" con radio negativo? La pseudoesfera[106] que Beltrami estudia es la superficie de curvatura (gaussiana) **constante negativa** y para su satisfacción, existe un mapeo similar al geodésico, sólo que dentro de un disco abierto. "Hay una formula que uno puede escribir, que resuelve el problema [de que el mapeo geodésico modifica las distancias]. Involucra la raíz cuadrada del radio de la esfera R^2.

[106] También es famosa porque,al igual que el "Cuerno de Gabriel", a pesar de tener "extensión" (área) infinita, su volumen es finito.

Beltrami lo tomó e investigó que quería decir cuando sustituía R^2 por - R^2. Él encontró que tenía sentido, pero sólo en el interior de un disco de radio R."[107]

El trabajo estuvo terminado alrededor de 1866, pero el editor de Beltrami, Antonio Luigi Gaudenzio[108] Giuseppe Cremona, dudaba que no se estuviera cayendo en un argumento circular, explicando geometrías no euclidianas, con geometría euclidiana[109]. No fue sino hasta 1868, el mismo año en que se publicó el trabajo de Riemann sobre geometría de variedades, y probablemente influenciado por él, que Beltrami quedó convencido de que su trabajo estaba bien encaminado y publico "*Saggio di Interpretazioine della Geometria Non-euclidea*"

(Ensayo de una interpretación de la Geometría No-Euclidiana"). Es un trabajo importantísimo, pues en él se introduce la idea de un "modelo de la geometría": el disco de Beltrami- Kelin; el producto de la proyección que hemos discutido anteriormente.

Antes de ese artículo de 1868, decir que la geometría de Lobachevsky-Bolyai-Gauss es de hecho una geometría es imposible, pues, como ya había mencionado, falta probar que sus supuestos (esto es, los primeros 4 axiomas euclidianos más una negación del quinto) no conducen después de algún argumento complicadísimo a una contradicción. Si bien para este momento nadie la había encontrado, eso no es suficiente para garantizar su consistencia. Ahora bien, el disco de Beltrami-Klein es una construcción que podemos hacer usando sólo elementos geométricos de Euclides y que, interpretado adecuadamente, imita lo que sucede con las reglas geométricas intrínsecas en las superficies de curvatura constante negativa, la geometría hiperbolica. Un *K-punto* (es decir, el concepto primitivo de punto en la geometría hiperbólica) es un punto euclidiano en el interior de un disco abierto de radio R; una *K-línea* es un segmento de recta en el interior del mismo punto; una *K-paralela* es uno de dichos segmentos que no intersecta a otro *dentro del disco*. Dicho esto, supongamos ahora que la gemoetría Lobachevsky-Bolyai-Gauss tiene escondida en su escencia una contradicción. Entonces, esa contradicción tendría que estar presente en lo que sucede dentro del disco Beltrami-Klein, y, por lo tanto, aparecería una contradicción entre los términos primitivos de la geometría Euclidiana, pues es es el material con el que construímos el disco. Resumiendo: si la geometría hiperbólica es contradictoria, entonce también lo es la geometría euclidiana; como nadie tiene dudas de que la vieja geometría es consistente, se sigue que la nueva también lo es. Debemos aclarar que ""[...] en este artículo de 1868 [Beltrami] no pretendía probar la

[107] Grey, [2004], p. 88.
[108] A saber, un lejano pariente del autor de estas líneas
[109] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Beltrami.html

consistencia de la geometría no euclidiana ni la independencia del postulado euclidiano de las paralelas. [No fue sino hasta que] Houel tradujo los trabajos de Lobachevsky y Beltrami al francés en 1870 que se dio cuenta de que el artículo de Beltrami probaba la independencia [de dicho postulado]"[110].En ese primer ensayo de 1868, Beltrami escribe una métrica riemanniana (distinta de la propuesta por Riemann) para un disco en un plano y relaciona las superficies de curvatura constante negativa con los teoremas demostrados por Lovachevsky, probando que las cuerdas dentro del disco tienen las mismas propiedades que las *lineas* de la geometría hiperbólica. No es sino hasta que publica, ese mismo año (hecho que a causado bastante confusión, pues se suele citar sólo el primer artículo), "Teoría General de las Superficies de Curvtura Constante" que realmente pone las piezas en orden. En él hace muchísimas contribuciones relevantes para nuestra historia. " […] analiza en detalle varios modelos de espacios hiperbólicos *n*-dimensionales, dos de los cuales se reducen en dos dimensiones a loa llamadas "métrica de Poincaré" y "métrica del plano superior de Poincaré". […] Beltrami empieza con esta última en el espacio z >0 en *n*+1 dimensiones, donde el elemento de longitud de arco $d\sigma$ s= $d\sigma$ / z, con *d* igual al elemento de longitud de arco común de la geometría euclidiana. Muestra […] que está métrica rimanniana tiene curvatura constante negativa, que sus geudésicas son semicírculos ortogonales al plano z=0, que la métrica inducida en la curvatura de los hemisferios ortogonales a z = 0 es un modelo *n*-dimensional de un espacio hiperbólico, y que la proyección vertical de esos hemisferios en el plano z=0 resulta exactamente en el modelo de la geometría hiperbólica que había estudiado en el artículo anterior." Finalmente, nota que la proyección estereográfica de de dichos hemisferios lleva precisamente al espacio hiperbólico de curvatura constante negativa que originalmente había descrito Riemann [y] prueba que con esa métrica hay triángulos cuya suma interna da más de 180º""[111] Es en este trabajo en el que Beltrami prueba conscientemente la relación de mutua consistencia entre las geometrías.

Ahora bien, es muy importante entender que esta solución a la consistencia de las geometrías requiere un cambio en la forma de interpretar qué son los axiomas y qué tiene como base la aparición de los *modelos*. A diferencia de la intuición griega, que empezaba por *observar* las propiedades de objetos que encontraba en el mundo, para convertirlos en entidades geométricas a través de la abstracción, encontrando después entre ellos relaciones de necesidad

[110] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Beltrami.html
[111] Osserman [2004].

para terminar sintetizando dichas relaciones en un sistema que tiene como base lo que consideraban las verdades más evidentes sobre los términos primitivos, la concepción de los *modelos* requiere que pensemos en los axiomas como un conjunto abstracto de reglas que no habla de nada en particular. Actualmente la literatura se refiere a esta diferencia haciendo la distinción entre un sistema axiomático material y un sistema axiomático formal. Permítanme un ejemplo de estos últimos, un sistema axiomático sencillo que propuso Richard Trudeu[112]. El sistema axiomático está compuesto de los términos primitivos *tik*, y s*unka.* Los axiomas de este sistema dicen:

1) Si A y B son tiks distintos, entonces A *sunka* a B o B *sunka* a A (o ambas cosas) .
2) Ningun *tik* se *sunka* a si mismo.
3) Si A,B, y C son *tiks* distintos, de forma que A *sunka* a B y B *sunka* a C, entonces A *sunka* a C.
4) Existen exactamente 4 *tiks.*

Cualquiera con experiencia en la actividad matemática sería capaz de probar teoremas como:

T1. Si un *tik sunka* a otro, entonces no es *sunkado* por ese otro.

De donde se sigue el corolario de que dados dos *tiks,* o uno *sunka* al otro o viceverza,pero nunca ambos al mismo tiempo.

T2. Si A *sunka* a B y C es un *tik* distinto, entonces o A *sunka* a C o C *sunka* a B (o ambas)

T3. Existe al menos un *tik* que *sunka* a todos los demas. (Al que por definición llamaremos un *flink.)*

T4. Existe un único *flink.*

Y así podemos seguir y seguir. Ahora bien, los teoremas que he mencionado aquí, no dependen del significado de los terminos *tik* y *sunka*, y son conclusiones lógicas abstractas. ¿Es este sistema axiomático consistente? Bueno, para verlo puedo construir un *modelo* material que satisfaga los requerimientos de los axiomas. Por ejemplo, puedo traducir los términos primitivos del sistema de la siguiente manera:

Tik: un libro de una pila que sólo contiene 4 de estos.

Sunka: se encuentra más alto en la pila.

Con esta traducción, los axiomas ahora dicen:

1)Si A y B son libros en la pila, Entonces o A está más alto que B o B está más alto que A.

2)Ningun libro está más alto que el mismo.

---

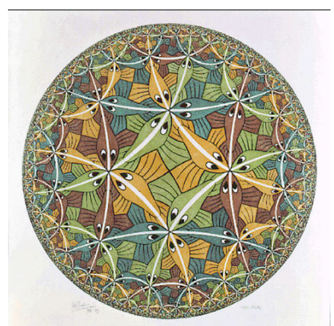
112 Trudeau[1986], p. 233.

3)Si tienes tres libros en la pila de forma que A está más alto que B y B más alto que C, entonces A está más alto que C.

4) En la pila hay exactamente cuatro libros.

Ahora imaginemos que estos axiomas llevan a alguna contradicción. Como nuestro modelo de los libros satiface (muy claramente) los axiomas, si el sistema tuviera alguna contradicción, entonces existiría una forma contradictoria de apilar libros y por lo tanto el mundo sería contradictorio. Como eso no es una posibilidad, nuestro pequeño sistema debe ser consistente.

El trabajo de Beltrami consiste en construir un *modelo* de las geometrías no euclidianas dentro del sistema axiomático de Euclides, vinculando asi su consistencia. Los modelos que estudió Beltrami no son los únicos que existen y tenemos algunas construcciones que le debemos a Poincaré, a Klein y otros. En todos estos modelos, lo que llamamos *recta* no se *ve* recto, pero cumple con las definiciones de rectas de alguna geometría. Tal vez los ejemplos más bellos de estos modelos son los famosos grabados de M.C. Escher, donde tesela con animales u otras figuras, estos modelos no euclidianos.



El ejemplo de la derecha se puede interpretar como un modelo de geometría hiperbólica si pensamos que los “huecos” blancos son las *líneas* y que nuestra regla de medir disminuye como 1/R cuando nos alejamos R pasos de centro (para alguien viviendo en ese espacio, todos los peces son del mismo tamaño y la circunferencia del disco es inalcanzable y por lo tanto representa el infinito). Este es el modelo de Poincaré.

3.5 El exilio de Euclides

Es así que veintidós siglos después de que se escribieran los *Elementos*, tenemos al fin una razón contundente para creer en la existencia de otra geometría, una en la que el quinto postulado no es necesario y que, negándolo, tiene el mismo grado de certidumbre epistémica que aquella a la que nos habíamos acostumbrado y que creíamos “natural”. Lo que es más, la conclusión después de los trabajos de Beltrami no es que habíamos “visto mal”, no dice que la geometría euclidiana es falsa y que hay otra mejor, más "general" o más "elegante" y que debemos abandonar la vieja teoría. A diferencia de la francesa, ésta no es una revolución que termina con la cabeza del Rey en la cesta, sino con un exilio necesario y una poligarquía sin precedente. Es en ese sentido una revolución silenciosa, en la que profundos cambios ocurieron casi inadvertidos y sólo tiempo después estamos en posibilidad de evaluar la magnitud de su influencia. No hay "geometría verdadera" y "geometría falsa"; eso hubiera sido lo de menos. Si una teoría hubiera suplantado a otra, el pensamiento kantiano hubiera seguido prácticamente inalterado, sustituyendo las afirmaciones sobre la geometría euclidiana por las equivalentes con la nueva geometría, pero el resultado de Beltrami es mucho más profundo: existen teorías matemáticas sobre la naturaleza del espacio que se excluyen mutuamente y entre las cuales la Razón Pura no puede distinguir. No hay argumenos matemáticos para optar por una por encima de la otra, como la teoría adecuada para describir esta realidad en que vivimos. Cuando esta línea de pensamiento se extiende a los trabajos de Riemann, resulta entonces que hay una infinita gama de geometrías entre las que ningun argumento puramente lógico puede distinguir una como verdadera: una vez destronado el Rey Euclides, lo que nos queda es la libertad de elegir la forma de representar y describir el espacio entre muchas posibles. En este punto la siguiente reflexión de Poincaré es bastante significativa:

> […] cuál es la naturaleza de los axiomas geométricos. ¿Son juicios sintéticos a priori, como decía Kant? Entonces se nos impondrían con tal fuerza que no podríamos concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico. No habría geometría no euclidiana[113]

Espero que después del empeño que puse en situar la obra de Euclides en el proyecto racionalista europeo se pueda apreciar la magnitud de su "caída" en su justa dimensión: lo que se "cae" no es un libro célebre, ni una serie de reglas de un juego abstracto que señores de barba blanca juegan por las noches; lo que se derrumba es la confianza pujante en que el Universo es "razonable"; el supuesto metafísico de que podemos conocer, via nuestro intelecto superior, las reglas "necesarias" de la naturaleza. Por usar una frase de la época[114], "Dios ha muerto" en el sentido epistemológico (también).

[113] Poincaré [1902], p. 61, sacado de Guerrero (2005).
[114] Proveniente de un contexto distinto, es cierto, pero no por ello menos adecuada para lo que nos ocupa.

Capitulo 4
Consecuencias

He intentado presentar la historia de la geometría euclidiana haciendo énfasis en los vínculos que tan célebre obra tiene con la cultura occidental, poniéndola en el centro del proyecto racionalista europeo ilustrado y como una piedra angular en la formación misma de la cosmovisión de dicho continente. Visto desde esa óptica, la caída o, más precisamente, el exilio de Euclides representa un cambio de fase, no sólo en el seno de la intelectualidad, sino en la forma misma en que se entendía la posibilidad del quehacer humano. En ese sentido, si quisiera ser consecuente con el planteamiento que se ha desarrollado en el texto, habría que rastrear las consecuencias de la aparición de nuevas geometrías en disciplinas tan lejanas como la política, las artes y las ciencias "duras". Aunque estoy convencido de que dicha empresa es posible, y que el redescubrimiento de la falibilidad y parcialidad del conocimiento es parte de un proceso histórico más general (el principio de la posmodernidad), no es el objetivo de este trabajo revisar dicho proceso, y por lo tanto me limitaré a señalar tres consecuencias (o influencias) incontrovertibles de la aparición de nuevas geometrías; tres cuestiones que alrededor de 1900 tomaron un papel central en la discusión sobre los alcances y limitaciones del conocimiento *científico*; tres preguntas inaplazables: ¿Cuál es la naturaleza del espacio?, ¿qué podemos conocer con toda certeza?, y ¿qué estudia la matemática exactamente?

Aunque la noticia del exilio de Euclides tardó cerca de treinta años en impactar el desarrollo intelectual (tomado desde 1868, con los artículos de Beltrami) la contundencia con la que cambió la forma de pensar fue dramática y, tal vez su mejor representación sea la figura de Bertrand Rusell. En su *Autobiografía*[115] nos relata sus discusiones con su hermano, Frank, alrededor de la premisa de que los axiomas de Euclides son indiscutibles. Al parecer, el joven Russell tenía problemas para aceptar la antigüedad como una prueba de validez. Tiempo después, en 1897, publica su primer libro matemático[116], *An Essay on the Foundations of Geometry* en el que expone, con mucha autoridad y contundencia, la historia de la geometrías no euclidianas y la perspectiva filosófica después de la aparición de estas, en conexión con la teoría del conocimiento de Kant. Es interesante que el índice del libro es en realidad un texto donde

[115] Russell, (2005).
[116] El segundo de su carrera

están sintetizados los argumentos centrales, sirviendo como un excelente mapa o guía de esta historia. El primer capítulo, por ejemplo:

Y así continua exponiendo los puntos más importantes del debate decimonónico sobre la verdadera ciencia de la geometría. Todo el segundo capitulo se dedica a discutir las tesis kantianas en oposición a los nuevos descubrimientos en dicha ciencia y termina por concluir en el punto 101, el último del capítulo:

Sólo dos años después, 1899, el ya de por sí polémico David Hilbert publica sus propios *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría) en los que propone un conjunto completo de veintiún (finalmente veinte[118]) axiomas que substituyen a los de Euclides. Un año después, presenta en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, en Paris, la famosísima lista de 23 problemas que serían el faro guía de la investigación matemática (y metamatemática) durante el primer tercio del siglo XX, al tiempo que Russell asiste al Primer Congreso de Internacional de Filosofía donde entra en contacto con los trabajos de Peano. En 1902, Russell publica una crítica a la exposición de Euclides de los *Elementos*, en la que, si bien no hace justicia al autor griego, ciertamente señala problemas lógicos en su concepción. En 1905, Einstein publica sus trabajos en electromagnetísmo (relatividad especial), cuántica (el efecto fotoeléctrico) y física estadística (movimiento browniano).

[117] Op. Cit.

[118] Casi al mismo tiempo, y de forma independiente, otra vez, R.L. Moore propuso su propio conjunto de axiomas, que coincidía en algunos con los de Hilbert, y en otros intercambiaba teoremas por axiomas. Demostró además la independencia de ese vigésimo primer axioma.

Llegado este punto, tengo que señalar que prácticamente todos los personajes que están por aparecer en este capítulo trabajaron, de una u otra forma, en dar una solución a las tres preguntas que se plantearon al principio del mismo simultáneamente, sin importar la disciplina a la que se dedicaron; que la velocidad a la que pasan los acontecimientos aumenta dramáticamente haciendo difícil rastrear la cadena de causa y consecuencias, de influyentes e influidos; que el periodo que viene a continuación es uno particularmente convulso y su reconstrucción es altamente susceptible de "presentismo". Por razones de claridad, me veo obligado a presentar el desarrollo posterior a las nuevas geometrías dividido en tres disciplinas: la matemática, que deberá dar cuenta de sus propios fundamentos; la filosofía, que deberá explicar de manera satisfactoria nuestra posibilidad de hacer ciencia sin recurrir a la existencia de entidades metafísicas como los "sintéticos *a priori*"[119]; y la física, que deberá elucidar la naturaleza del espacio. Pero en realidad, en esas primeras décadas del siglo pasado, no existían tales divisiones y es sólo *a posteriori* que podemos distinguir estas tres líneas de investigación con mayor precisión. Para terminar con este párrafo de advertencias, hay que añadir que cada una de las mencionadas disciplinas tiene, por supuesto, una historia más amplia y el impacto de la aparición de nuevas geometrías está en función de elementos que pertenecen a otras ramas de dicha historia. Así, para cada una será necesario presentar, de forma somera y sintética, elementos que explican el contexto en el que se recibió la ya tan mencionada noticia. Dicho esto, empezaré por mostrar lo que ocurrió dentro de la matemática.

4.1 ¿Qué demonios estudia la matemática?

Ya he mencionado la propuesta de axiomatización de Hilbert que consta de veinte axiomas. En ella, los axiomas están divididos en cinco grupos (incidencia, orden, paralelismo, congruencia y continuidad), tres términos primitivos (punto, línea, plano) y tres relaciones primitivas ("estar en medio", congruencia, y contención). A primera vista, el trabajo es ocioso pues requiere más trabajo para inferir los mismos teoremas que el sistema clásico lograba con sólo cinco axiomas y su presentación no es particularmente intuitiva. Lo que sucede es que el propósito de esta forma de axiomatizar no es de carácter didáctico, como había sucedido en ocasiones anteriores, y el trabajo tiene una agenda secreta: promover la visión formalista de la matemática.

Para entender esta postura, es útil releer el artículo de 1868 de Beltrami. En el fondo, lo que dice es que es posible "interpretar" teoremas de la geometría euclidiana (aquellos que

[119] O bien, redefiniendo qué significan estos términos.

suceden dentro de lo que llamamos el *K-disco*, un objeto que podemos construir con términos primitivos del sistema de Euclides) como los axiomas de la geometría hiperbólica. Y entonces conviene preguntarse: ¿de cuál de las geometrías hablan esos enunciados? Al parecer, el conjunto de símbolos (que se pueden interpretar en ambas teorías) no hablan ni de una ni de otra. Los enunciados tienen una relación lógica basada en las "relaciones primitivas" de la teoría y el significado no es importante para derivar nuevas consecuencias lógicas de dicho conjunto de enunciados; el significado es una interpretación de dichas reglas como el modelo de algún suceso en el mundo. Esta es, a grandes rasgos, la postura que adoptaron los "formalistas", encabezados por Hilbert, respecto al quehacer matemático. Es esta postura "filosófica" la que explica la manera en que Hilbert construye su axiomatización, pues está intentado mostrar que la geometría se puede reducir a una serie de relaciones abstractas entre símbolos abstractos.

Con la axiomatización de Hilbert termina conceptualmente la historia de las geometrías no euclidianas y se termina el antiquísimo debate por la naturaleza independiente del quinto postulado, pero los cuestionamientos sobre el quehacer matemático no han hecho sino empezar y el impacto del cambio de *status* del sistema axiomatico más antiguo a una mera elección se puede rastrear en toda la discusión sobre los fundamentos que vino a continuación. Dicha discusión se dio en el corazón de una teoría más abstracta y más general de la que he estado huyendo todo el capítulo, pero que ya no es posible continuar sin mencionarla: la teoría de conjuntos de Cantor.

De forma muy breve, muy general, exageradamente simplificada, permítanme presentar una historia de la teoría de conjuntos. Fue desarrollada de forma prácticamente individual por Georg Cantor, entre 1874 y 1884 y es probablemente, la más polémica de las teorías matemáticas. En particular porque tiene consecuencias muy extrañas respecto al infinito.

Cantor trabajaba buscando series de Fourier de funciones discontinuas. Rápidamente descubrió que había casos en los que, a pesar del aparentemente gran número de discontinuidades, era posible encontrar la serie y en otros, similares, no. Intentando "clasificar" estas discontinuidades llegó a un resultado sorprendente. De acuerdo a un profundo análisis del concepto de "número" y justificando esa noción en otra, al parecer mejor definida, que es la de "conjunto", Cantor logró probar que existen conjuntos infinitos unos más grandes que otros. Es más, construye todo el álgebra de las cardinalidades de conjuntos infinitos (los "transfinitos", representados usualmente por el carácter hebreo *Aleph*).

¿Infinitos más grandes unos que otros? ¿Que no lo infinito es infinito? ¿Qué quería decir exactamente que Cantor "había probado" que hay unos infinitos más grandes que otros? ¿Basado en qué? ¿En conjuntos? ¿Y los conjuntos son matemáticas? ¿Qué es un conjunto? ¿Qué es matemática? Tantas preguntas en tan poco tiempo... Y una que destaca por encima de las otras: ¿que no la matemática era certera[120], segura, sólida, inmutable, verdadera?

La teoría de conjuntos es el golpe definitivo a la sensación de seguridad en el ambiente matemático. Hubo reacciones feroces. Kronecker, de quien dependía hasta cierto punto la promoción académica de Cantor, se dedicó sistemáticamente a ridiculizar y denostar el trabajo de éste. Al parecer, el tratamiento fáctico (como opuesto a potencial) que hacía Cantor del infinito le resultaba repugnante, y representa históricamente la versión más radical de la postura intuicionista, o finitista, o constructivista, de la matemática. Según esta postura, los matemáticos encuentran nuevos teoremas y nuevos resultados cuando su "intuición matemática" entra en contacto con la parte "matemática" del mundo (cualquier parecido con Platón no es mera coincidencia). Siguiendo esa idea, cualquier prueba que requiere una infinidad de pasos en el camino no debe tener validez en la matemática, puesto que nuestra intuición no puede dar esa infinidad de pasos. Y de la misma manera, probar la existencia de algo, usando la artimaña de negarlo y encontrar una contradicción (*reductio ad absurdum*) no puede ser considerado válido, pues dicha prueba no permite a la intuición "experimentar" la existencia de esa entidad. El problema es que partes centrales de la teoría de conjuntos tienen ese tipo de pruebas. Aunque los intuicionistas trabajaron arduamente en reconstruir todo lo que se pudiera de la matemática usando sólo pruebas directas y con un número finito de pasos, lo cierto es que dicha postura filosófica detenía en muchos sentidos el desarrollo matemático, y probablemente ellos lo sabían, pero tenía la virtud de ser una postura segura contra el abismo de las contradicciones que empezaban a aparecer.

Efectivamente, la nueva teoría no nació libre de fallas y el mismo Cantor apuntó a un detalle crucial de la misma conocido como la "hipótesis del Continuo". Pero era tan útil, tan fértil, tan novedosa, que tirarla por la borda por una incomodidad filosófica, o por un par de "detalles", parecía a los más arrojados retrógrado. Hilbert, quien tenía claro lo que estaba en juego en la discusión sobre los conjuntos, pronunció la famosa sentencia "nadie podrá arrojarnos del paraíso que Cantor nos ha otorgado", refiriéndose a las objeciones intuicionistas

[120] En el sentido de sus resultados son siempre ciertos

de Kronecker y posteriormente de Brouwer[121]. Hilbert está tan entusiasmado por los nuevos resultados que no está dispuesto a renunciar a los teoremas que usan la reducción al absurdo o infinitos pasos en su demostración: siempre que no contradigan a los axiomas serán bien recibidos. Otra vez, la pieza clave del rompecabezas es la consistencia y es por ello que Hilbert pone, encabezando su lista de veintitrés problemas, la Hipótesis del Continuo. Todo el chiste es, según su proyecto formalista, encontrar una prueba de la consistencia de la aritmética.

En el debate hemos visto dos posturas, la finitista y la formalista, pero hay una tercera postura. Se puede pensar que la matemática no es producto de la interacción entre la intuición matemática y los objetos en el mundo, ni un simple juego de combinatoria de los símbolos de un sistema, sino una consecuencia necesaria de la lógica. Se parece al formalismo, en el sentido de que le quita toda importancia al significado de los símbolos, pero a diferencia de ellos, los formalistas aseguran que, el conjunto de sistemas axiomáticos consistentes es una consecuencia necesaria (y por tanto *a priori*) de las reglas de la inferencia lógica. Uno de sus primeros expositores es Gottlob Frege[122] y siempre es citado como uno de los ejemplos de los peligros de las inconsistencias. Cuando estaba por publicar su trabajo de fundamentación de la matemática como una rama de la lógica, recibió una carta, el 16 de junio de 1902, que tiraría todo su trabajo. Frege publicaría una nota diciendo:

> Un científico difícilmente puede encontrarse con algo menos deseable que ver que los fundamentos se caen justo cuando el trabajo está siendo terminado. Yo fui puesto en esa situación por una carta del Sr. Bertrand Russell cuando el trabajo estaba casi en la imprenta.

Efectivamente, Russell descubre que en una regla fundamental del sistema de Frege existe una contradicción insalvable[123]. A pesar del fracaso de este primer intento, el proyecto logisista coincide con los intereses de Russell, y junto con Whitehead, retoma el intento de Frege y se embarca en la escritura de sus propios *Principia Mathematica*, una nueva construcción de la matemática como rama de la lógica. Pero antes de avanzar tanto, permítanme recapitular.

---

121 El punto más álgido del debate entre Hilbert y Brouwer fue, quizás, el momento en el que Weyl, alumno distinguido del primero, adopta la postura intuicionista del segundo.

122 Reconozco que cometo otra injusticia al mencionar sólo de pasada a este filósofo tan importante, en muchos sentidos padre de la filosofía analítica. Sus contribuciones en lógica y filosofía son muy influyentes, pero su participación en la geometría es mínima.

123 Conocida como la paradoja de Rusell y popularizada como la paradoja del barbero.

Primero y fundamental, achacar la crisis de los fundamentos de las matemáticas al exilio de Euclides sería pecar de arrogancia. Si bien es cierto que la discusión sobre la necesidad del quinto postulado es la primera que sucede en el terreno de la metamatemática (como apunta el mismo Russell), y que la pérdida de la hegemonía de un sistema axiomático destaca la importancia de abrir la matemática al estudio de todos aquellos sistemas libres de contradicción, no podemos pensar que la discusión filosófica sobre las naturaleza de los objetos de estudio de esta ciencia sea una consecuencia exclusiva de la aparición de nuevas geometrías. Lo cierto es que son una fuerte influencia, pero la mayor responsabilidad recae, como ya lo he mencionado, en la teoría de conjuntos. Aún reconociendo esto, es innegable que la desaparición de una certeza tan grande como la que proporcionaban los *Elementos*, es un factor, psicológico si se quiere, por un lado para promover el cuestionamiento de las bases mismas de la matemática y por otro, para advertir sobre las complicaciones que conlleva el estudio de los axiomas. Es decir que influencia, pero no determina la crisis de los fundamentos.

Por otra parte, debemos destacar el hecho de que las respuestas que se dieron a la pregunta fundamental de "¿qué estudia la matemática?" obligaron a los participes de la discusión a tomar una postura filosófica adoptada por razones, una vez más, metamatemáticas. A grandes rasgos, esas posturas se resumen en tres programas: el finitista, el logisista y el formalista. Y el "experimento crucial" era la prueba de consistencia.

De esta manera, las preocupaciones metamatemáticas que habían generado la axiomatización de la geometría, la axiomatización de la artimética natural y las paradojas en la teoría de conjuntos, obligaron a los cientificos de principios del siglo XX a alinearse en alguno de los tres programas mencionados, y el desenlace de este debate llegó mucho después, en 1931, y en algún sentido es, de todos los posibles, el desenlace más elegante, más asombroso y que más perplejidad causa.

Pero no nos adelantemos.

4.2 Hacia una nueva filosofía de la ciencia.

Pongamos entonces nuestra atención en 1910[124], el año en que Russell y Whitehead publican el primero de los tres tomos de los *Principia Mathematica*, en la Inglaterra próspera de principios del siglo XX cuando el debate sobre los fundamentos últimos de la matemática está en pleno desarrollo. En el intento por mostrar que la lógica puede por sí sola reconstruir la ciencia de las cantidades sin caer en las contradicciones que sus predecesores habían

[124] El mismo año en que Hilbert recibiría la medalla Bolyai.

encontrado, Russell y Whitehead se embarcan en un delicado y extenso proyecto. Según su estudio, las paradojas aparecen cuando los elementos simbólicos básicos se combinan para referirse a sí mismos, por lo que proponen la distinción de dichos elementos en distintos "tipos" con una jerarquía entre ellos, evitando así que los de un nivel puedan referirse a otro de un nivel superior.

Por aquellas épocas apareció en las aulas de Cambridge un joven ingeniero vienés que había llegado a esa Universidad inspirado por su lectura del primer tomo de los *Principia* de Russell y el trabajo y consejo de Frege. Rápidamente, y como era natural, entró en contacto con Bertrand Russell, quien reconoció en el joven al que podría convertirse en su sucesor filosófico. Fue así que Ludwig Wittgenstein empezó sus estudios bajo la tutela de Russell y se empapó de la discusión filosófica de la época. En 1913, Ludwig hereda una fortuna por la muerte de su padre[125] y entra en depresión. Abandona Cambridge a pesar de los consejo de su maestro y se va a vivir a un retiro solitario en Noruega, donde por casi un año, trabaja prolíficamente en lo que se convertirá en su obra más importante. Mientras esto ocurre, el imperio que cobijaba a la aristocracia de la que Wittgenstein era parte se venía abajo.

Viena, la capital de ese imperio, seguía siendo el centro de debate y creación intelectual en la Europa Continental. En el *Ringerstrassten* o en el Café Central, escritores, periodistas, músicos, artistas e intelectuales de todas la variedades pasaban largas horas discutiendo las cuestiones más recientes de sus respectivas disciplinas y sería sobre esas mesas abarrotadas de ceniceros y tazas de café que se idearían notables novelas, teoremas y propuestas filosóficas. Intelectualmente era lo más sofisticado y refinado, pero políticamente no podía aguantar más. Y como veremos más adelante, su influencia será importante en nuestra historia.

Mientras tanto, en 1914, a la muerte del príncipe heredero a manos de los terroristas conocidos como "La Mano Negra", el imperio Austro-Hungaro se vino abajo, y junto con él cerca de 40 millones de vidas, cerca de la mitad civiles que perecieron en la brutalidad de la trincheras o en los continuos bombardeos. En medio de esas trincheras, Wittgenstein, que había llegado de Noruega como voluntario, encontraba el tiempo y espacio, entre la metralla y la pólvora, entre el fango y el lodo, entre la muerte y la desesperación, para escribir uno de los libros considerados centrales en la filosofía del siglo XX. El *Tractatus Logico-Philosóphicus*, que destaca, para empezar, por una frialdad estática, como un témpano de hielo que servía al joven filósofo de asidero frente a la barbarie y la locura, es uno de los textos más crípticos y a la vez

[125] Misma que dona casi completamente y de manera anónima a artistas de la época, como el poeta Rilke.

más influyentes de la filosofía del siglo XX. Su título, que fue escogido tiempo después en consenso con Russell y Moore, hace referencia a la obra de Baruch Spinoza (el *Tractatus Theologico-Politicus*), y su estructura formal (siete proposiciones con subproposiciones cada una, excepto la última) nos hace pensar que Wittgenstein usó el mismo recurso que cuando Spinoza escribió su *Ética*: copiar los *Elementos* de Euclides. Si bien no pretende ser un sistema matemático formal y carece de axiomas y definiciones, la forma en la que expone sus tesis es afín al mensaje mismo del texto: la mayor parte de los problemas de la filosofía surgen de construir enunciados en el lenguaje que no corresponden a "estados de cosas", a combinaciones de hechos atómicos del mundo. Por ello, cada término del libro de Wittgenstein ha sido fríamente calculado y su lectura tiene la misma cualidad que seguir una prueba en lógica.

Qué dice exactamente, es una pregunta difícil de responder y el mismo Ludwig pasaría muchos años matizando y reinterpretando sus ideas, para defenderlas de las interpretaciones que, tiempo después, harían Russell y otros. Aunque su publicación tuvo un éxito limitado en un principio, mismo que le debía en gran medida a la introducción escrita por Russell, al menos le sirvió a Wittgenstein para obtener el título de doctor en filosofía (con el mismo Bertrand y Moore como sinodales del trabajo). Pero, según la postura del mismo libro, los problemas de la filosofía se debían a errores del lenguaje, a que llenamos de metafísica las discusiones por construir enunciados sobre entidades que son fundamentalmente inexistentes, y ya se sabe que "de lo que no se puede hablar es mejor callarse"[126]. Dentro del *Tractatus*, subproposición 3.04, encontramos la afirmación: "si un pensamiento fuera verdaderamente *a priori*, sería un pensamiento cuya mera posibilidad aseguraría su verdad. El conocimiento *a priori* de que un pensamiento es verdadero sería posible sólo si su verdad fuera distinguible del pensamiento mismo". Es decir, que Ludwig no cree en la seguridad kantiana, en entidades *a priori,* y está intentando dotar de certidumbre a la filosofía promoviendo que los enunciados de ésta correspondan a "estados de cosas".

Wittgenstein se retira de la filosofía por un largo periodo para dedicarse, entre otras cosas, a dar clases en un primaria, a diseñar una casa modernista, a podar el jardín de las mansiones de Viena. Cuando regresó, años más tarde, a las aulas de Cambridge a trabajar en filosofía, su enfoque sobre la problemática era radicalmente distinto (en gran medida por la influencia de Ramsey, como él mismo señala en la introducción a sus *Investigaciones filosóficas*) y

[126] Parafraseando la última proposición del *Tractatus.*

comúnmente se habla del trabajo de este filósofo dividido en dos periodos prácticamente disconexos.

Ahora bien, aunque parezca lo contrario, no es de Wittgenstein de quien me propongo hablar, sino de un grupo de compatriotas suyos, conocidos como el Círculo de Viena, quienes adoptaran el *Tractatus* como el texto central de su esfuerzo filosófico: limpiar a la filosofía de todo rasgo de metafísica, de cualquier enunciado que no corresponde a un "estado de cosas" que podamos verificar[127]. En algún sentido, los miembros del Círculo de Viena sintieron que la idea de Russell de mostrar que la matemática era una consecuencia necesaria de la lógica podía extenderse, a través de los trabajos del *Tractatus* de Wittgenstein, a la totalidad del pensamiento científico, fincando las bases de ese tipo de enunciados en dos características: por un lado, la aprehensión de hechos atómicos del mundo por vía empírica, y por el otro, las relación lógicas entre ellos. De ahí que a la postura que defendían se le conozca como empirismo lógico o positivismo lógico.

Wittgenstein fue una influencia importante para el grupo, como lo confirma el manifiesto del Círculo de Vienna[128]:

> Más avanzada es la clarificación de los origenes lógicos de la aberración metafísica, especialmente a traves de los trabajos de Russell y Wittgenstein.

Aunque Wittgenstein asistió a un par de sus reuniones, Ludwig siempre sintió que lo mal interpretaban y nunca se consideró a sí mismo parte del positivismo lógico.

En el mismo manifiesto, los miembros de este célebre círculo (que incluye a personajes como Hans Hahn, Philipp Frank[129], Rudolph Carnap, el mismo Moritz Schlick, Otto Neurath y Gustav Bergmann, entre otros) se declaraban inspirados por el ejemplo positivista de Ernst Mach y unían esfuerzos para construir un "ciencia unificada": una en la que todos sus enunciados son cognitivamente relevantes (en el sentido de que pueden ser verificados o refutados), libre de metafísica.

Pero van más lejos. El "análisis lógico supera no sólo la metafísica [...] sino también la metafísica escondida en Kant y el *apriorismo* moderno. La concepción científica del mundo no

---

127 Aquí es necesario aclarar que el Circulo de Viena tenía discrepancias al interior, y que no necesariamente todos sus miembros se adirieron al principio de verificación empirica que representaban Carnap o Schlick, por ejemplo, y sostenían posturas coherentistas, como el caso de Neurath.

128 Presentado en 1929, para la Sociedad Ernst Mach, y dedicado a Moritz Schlick, aunque el Círculo llebava ya casi una década de existencia.

129 Quién curiosamente había estudiado en Götingen, bajo la tutela de Hilbert, Felix Klein, y Boltzman.

sabe de un conocimiento incondicionalmente válido derivado de la razón pura, ningún «juicio sintético a priori» del tipo de los que se encuentran en las bases de la epistemología kantiana y más aún, en toda la ontología y metafísica pre y post Kantiana."[130] En ese sentido, el manifiesto es un programa que pretende responder a la pregunta sobre la posibilidad y las características del conocimiento científico, la segunda de las tres preguntas guías que planteamos en la introducción. En particular, la respuesta del Circulo de Viena es la de negar la existencia de los juicios sintéticos *a priori*, aunque otros positivistas lógicos de la época adoptaron otras estrategias. El programa que presentaron para la Sociedad Ernst Mach proponía encontrar los fundamentos de (en el orden del texto original): la aritmética, la física, la geometría, la biología y la psicología, y finalmente, las ciencias sociales; y agregan una pequeña reflexión alrededor de cada uno de estos problemas. Es de especial interés para nuestra historia el tercer punto:

> 3.3 Los fundamentos de la geometría.
>
> […] Las investigaciones de Gauss (1816), Bolyai (1823), Lobatchevski (1835) y otros llevó a la *Geometría No-Euclidiana*, a la realización de que el hasta entonces dominante sistema geométrico clásico de Euclides era sólo uno de una infinidad de conjuntos de sistemas, todos con igual mérito lógico. [La *geometría matemática*] gradualmente se volvió más y más formalizada a través del desarrollo del análisis lógico. Primero fue aritmetizada, es decir, interpretada como la teoría de cierto sistema de números. Después fue axiomatizada, es decir, representada por medio de un sistema de axiomas que conciben los elementos geométricos (puntos, etc.) como objetos indefinidos, y fija únicamente sus relaciones mutuas. Finalmente la geometría fue *logizada*, es decir representada como la teoría de ciertas relaciones estructurales. Así, la geometría se volvió el campo más importante de aplicación para el método axiomático y para la teoría general de relaciones.[131]

El Círculo de Viena es famoso por la eminencia de sus miembros, y su influencia llevaba cerca de una década permeado las discusiones filosóficas en Europa antes de la publicación del manifiesto en 1929. Aunque son históricamente reconocidos como unos de los

[130] En el Manifiesto del Círculo de Viena.
[131] Los subrayados son del texto original.

principales promotores del positivismo lógico, no son los únicos que sintieron la necesidad de retomar la discusión sobre la posibilidad de conocer con certeza, misma que había quedado en pausa desde la *Crítica de la Razón Pura*.

Ese mismo año de 1929, un joven miembro del Círculo presentaría su disertación para obtener el título de doctor, bajo la supervisión de Hans Hahn. En ella, pretendía responder a la pregunta que Hilbert y Ackerman habían planteado en un libro del año anterior (*Principios de Lógica Teórica*): ¿Son suficientes los axiomas de un sistema para inferir de ellos todas las proposiciones verdaderas en todos los modelos que se pueden construir de ese sistema? En una tesis que destaca por su brevedad, demuestra la completitud de la lógica de primer orden. Dos años después escribiría *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados*, el texto por el que se ganaría el título del más influyente de los matemáticos del siglo XX[132] y en el que da una respuesta formal a la histórica controversia que hasta ese momento, ya el año de 1931, seguía existiendo en torno a la naturaleza de las matemáticas. Lo que Kurt Gödel consigue es demostrar, de manera formal y rigurosa, que cualquier sistema lógico formal de primer orden capaz de definir a la aritmética es o consistente o completo, pero nunca ambas cosas.

En su primer "teorema de incompletitud" empieza por demostrar que siempre se puede construir un enunciado dentro de dicho sistema del que no se puede probar ni su verdad ni su falsedad. Usando un ingenioso sistema para escribir proposiciones de la metamatemática en el lenguaje mismo de la aritmética, Gödel consigue encontrar en el corazón de todos esos sistemas lógicos formalizaciones abstractas del enunciado: "Esta proposición no tiene prueba", un enunciado de Gödel. Puesto que, si el sistema es consistente, la afirmación no es ni verdadera ni falsa, podríamos incluirla como un nuevo axioma del sistema. Pero en este nuevo sistema, aumentado, volveríamos a encontrar un enunciado de Gödel. Bueno, repitamos entonces al proceso *ad infinitum*[133] y tomemos como axiomas los distintos enunciados indecidibles que van apareciendo hasta completar el conjunto de enunciados ciertos sobre ese sistema.

El problema es que un sistema axiomático construido de esta manera es completo sólo si es inconsistente y eso es lo que demuestra Gödel en sus segundo teorema de incompletitud. Es decir, que ningún sistema de la lógica de primer orden que cuenta con un procedimiento

[132] A decir del obituario publicado en *Times* al día siguiente de su muerte.
[133] Como hace, por cierto, la axiomatización completa y consistente de la aritmética de los naturales de Peano.

recursivo de demostración puede usar dicho procedimiento para probar su consistencia.

Con esto, el proyecto formalista de Hilbert y el logicismo puro de Russell sufrieron un golpe del que ya no se repondrían. Ni la aritmética es una consecuencia lógica de sistemas formales, ni existe una prueba mecánica de su consistencia. El larguísimo proceso de abstracción y formalización del conocimiento matemático que inicia en la Grecia clásica tiene en este resultado su punto climático, y la forma de aproximarse al mismo cambia de forma definitiva a la luz de estos descubrimientos. La respuesta que Gödel da a la pregunta sobre el objeto de estudio de la matemática es que tiene un componente que trasciende el mero estudio de las consecuencias necesarias de un conjunto de reglas y que se parece más a la astronomía, pues al igual que ésta, refina y mejora su capacidad de observación para acceder a objetos de conocimiento más lejanos; la matemática descubre nuevas relaciones entre objetos platónicos a través de un sentido falible, pero perfeccionable, llamado intuición matemática.

Y, aunque los factores de presión histórica que empujaron a los lógicos y filósofos de la época a cuestionar estos rincones tan fundamentales de la matemática ciertamente son más cercanos al desarrollo de la teoría de conjuntos y el análisis real , hay paralelismos casi psicológicos entre los teoremas de Gödel y la aparición de geometrías no euclidianas. El espíritu ilustrado que confía en la necesidad del conocimiento racional y que, siguiendo ciegamente la cuerda floja de la abstracción y la formalidad, acepta con convicción los resultados más sorprendentes, para descubrir al final que caminaba sobre el vacío, sin red de seguridad, sin la certeza básica que alentaba su paso. Y se encuentra al fin del otro lado, descubriendo que la pérdida de esa certeza no representa una amenaza, sino, más bien, la posibilidad de que nuevas ideas y resultados más sorprendentes tengan lugar.

4.3 La teoría general de la relatividad

Esos resultados sorprendentes ya estaban a la vista de todo mundo. Sería un íntimo amigo de Kurt Gödel el encargado de dar uno de los ejemplos más famosos de la historia y responder a la tercera de las cuestiones que motivaron este capítulo : ¿cuál es la estructura del espacio físico? Se trata de Albert Einstein y su teoría de la Relatividad General. Por lo dicho anteriormente, y tomando en cuenta que la física teórica es localmente isomorfa a la matemática, podría parecer *natural* que la aparición de nuevas teorías respecto al espacio, un lenguaje más amplio y rico para referirse a las propiedades geométricas de los objetos y sus relaciones, resultara inevitablemente en un cambio análogo en la manera de pensar la mecánica. Aunque en la época empieza la distinción más profunda entre la matemática, la física y la filosofía, parece lógico pensar que las revolucionarias ideas sobre geometrías distintas a la de Euclides flotaban en el aire y estaban en la mente de los científicos, sin importar su especialidad. Efectivamente, visto desde el presente, *a posteriori,* podemos pensar que así fue, sin embargo el desarrollo de la Relatividad tiene un camino paralelo, en el sentido proyectivo del término[134].

Efectivamente, la física como la entendemos empieza con Galileo, con un cuestionamiento respecto a la relación entre la estructura del espacio y la relatividad del movimiento. La única respuesta matemática que existía en la época a esas preguntas era la geometría de Euclides, que describe de manera adecuada la experiencia cotidiana (pues para eso se hizo), aunque ya el debate entre Newton y Leibnitz apuntaba a un problema en los cimientos de la mecánica. Debido al rotundo éxito predictivo, práctico y tecnológico de la misma, las reservas sobre la pureza de sus enunciados básicos tuvo una larga pausa y resurgió a finales del siglo XIX, con los resultados teóricos del escocés James Maxwell y su confirmación experimental por parte de Hertz: la luz es la oscilación del campo electromagnético y viaja a velocidad constante. ¿Constante respecto de quién?, preguntaría cualquier estudiante de mecánica. Constante respecto al éter, fue la respuesta que se dio. El éter era la sustancia que *debía* permear todo el espacio, pues será el medio por el que viajaría la onda, pero que nadie había podido detectar por medios mecánicos debido a su naturaleza nada viscosa y sutil.[135]

El mismo año que muere Maxwell, 1879, nace Einstein. Según sus propias memorias, dos impresiones infantiles lo marcarían y decidirían su futura profesión. La primera sería el efecto magnético de la Tierra sobre una brújula que recibió como regalo de su padre y la segunda la lectura de los *Elementos* de Euclides. Inició así la famosa historia del estudiante rebelde y de trayectoria académica cuestionable, eso sí destacado en matemáticas y física, que luego de concluir sus estudios en el instituto politécnico de Zurich en 1900, obtuvo un trabajo en la oficina de patentes de Berna. Mientras tanto, las ondas electromagnéticas de Maxwell seguían dado de qué hablar y habían logrado engañar a Michelson y Morley en su famoso experimento que pretendía medir la velocidad de la Tierra respecto al vacío y que había obligado a Lorenz a asumir que el movimiento de la tierra causaba compresiones en el éter que cambiaban la velocidad de la luz en el mismo, llegando así a sus famosas transformaciones. Fue en 1905, el año glorioso de Einstein en que publica en la revista *Annalen der Physik* sus cuatro

---

[134]Sus caminos se tocan en el origen y prácticamente al final.

[135] La idea no era nueva. Diogenes Laercio le atribuye a Pitágoras la idea de que "los rayos del sol penetran por el éter frígido y por el denso, pues ellos al aire lo llaman éter frígido, y alma húmedo éter denso".

artículos famosos: el movimiento browniano, el efecto fotoeléctrico, la relatividad especial, y la equivalencia entre masa y energía. Con estos cuatro trabajos cambia de manera sustancial la forma en que la ciencia concibe conceptos primitivos como el tiempo, el espacio y la energía. En particular el artículo titulado "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento", el joven y desconocido físico, parte de dos principios fundamentales (el principio de relatividad de Galileo y la constancia de la velocidad de la luz) y demuestra que si abandonamos la idea de la simultaneidad y aceptamos que tanto las medidas espaciales como las temporales no son absolutas, entonces es posible explicar las "asimetrías que no parecen inherentes a los fenómenos [electromagnéticos]. Por ejemplo la acción electrodinámica recíproca entre un conductor y una imán. […] Ejemplos como estos, junto con los fallidos intentos por descubrir movimientos relativos entre la Tierra y el medio en el que viaja la luz [éter], sugieren que los fenómenos electromagnéticos así como los mecánicos no poseen propiedades correspondientes a un reposo absoluto."[136] Es decir que reformula el principio de relatividad de Galileo y redefine a los observadores inerciales como aquellos que viajan a velocidad constante respecto a la luz. De este modo, las transformaciones que nos llevan de la descripción de uno de esos observadores ya no son las transformaciones rígidas del espacio y la suma clásica de velocidades (lo que en el segundo capítulo llamamos el grupo G^3) sino un nuevo grupo de transformaciones L^4 (pues fue previamente descubierto por Lorentz) en un espacio hiperbólico de cuatro dimensiones (llamado espacio de Minkowski). Einstein dio en 1905 el mayor salto de abstracción que requiere su teoría, pero, como él mismo reconocía, los resultados publicados en ese año son un caso especial, pues sólo se refieren a la dinámica de cuerpos rígidos en ausencia de gravedad.

> Era necesario hallar una nueva formulación de inercia, que en caso de ausencia de un <<campo real de gravitación>> pudiera transformarse en la formulación de Galileo del principio de inercia[137].

No fue sino hasta 1912 que Einstein, junto con su amigo Marcel Grossman, se dedicó de manera casi exclusiva a la geometría diferencial y a comprender los trabajos de Riemann, de Ricci y de Levi-Civita. En 1915 presentó su versión generalizada de la teoría de la relatividad, donde incluía al campo gravitacional no como una fuerza como el resto, sino como la

[136] Einstein, (1905).
[137] Einstein, (1984), p.97

deformación de la geometría del espacio tiempo. La realidad física, el Universo en su estructura, es una variedad reimmaniana que se curva como consecuencia de la masa. No podemos determinar su estructura *a priori* y requerimos hacer medidas para conocer su curvatura. "La pregunta acerca de si la geometría práctica del Universo es euclidiana o no tiene un sentido claro y la respuesta sólo puede proporcionárnosla nuestra experiencia"[138]. Los resultados de Einstein, sintetizados en las ecuaciones que relacionan el tensor de curvatura con la distribución de energía y materia en el Universo, tienen tal acuerdo con los experimentos que se han hecho, que no es posible negar que el espacio-tiempo se deforma y que la geometría del mismo no es necesariamente euclidiana y como consecuencia, que los observadores inerciales sólo se puedan definir de manera local.

Resulta digno de asombro que investigaciones referentes a la velocidad de los objetos, a las interacciones entre conductores e imanes, hayan encontrado en la matemática que se desarrolló casi medio siglo antes, una unión no sólo elegante en su descripción de fenómenos conocidos, sino sorprendente en sus consecuencias y poderosa en sus predicciones. Einsten mismo dijo: "Parece que la mente humana tiene primero que construir formas, independientemente, antes de que podamos hallarlas en las cosas".[139]

Es uno de los ejemplos más citados de cómo el desarrollo teórico de las matemáticas abstractas, cavilaciones al margen de la realidad práctica y concreta de la cotidianidad, de una forma misteriosa se anticipa a lo que después será necesario para explicar los fenómenos, y parece apuntar a que la relación entre las entidades aparentemente abstractas que estudian los matemáticos y el mundo en que vivimos es más cercana de lo que imaginamos. O tal vez este caso es semejante al que todos hemos estado expuestos cuando estudiamos un texto cuyo vocabulario excede nuestro conocimiento y tiempo después, en una segunda lectura, descubrimos toda una nueva interpretación como consecuencia de que nuestro "lenguaje" se ha ampliado. Se me ocurre como alternativa que, una vez desarrollado y sintetizado formalmente, una vez que se puede hablar con justa razón de que hay nuevas geometrías cuya consistencia es en todo equivalente a la de Euclides, es posible entonces concebir un Universo con curvatura; una vez abandonada la idea de la *necesidad* de los axiomas de Euclides puede surgir el interes en *medir* la estructura de nuestro propio espacio-tiempo.

Finalmente, después de vivir más de veinte siglos bajo el encanto de los *Elementos*,

[138] Ibid, p.43
[139] Takahashi, [2006]

debemos admitir que su único rasgo distintivo, lo único que lo distingue de las demás geometrías, es (como lo apuntó ya Poincaré) su simplicidad. Nada en su historia nos permite suponer que el Universo sea euclidiano, ni que la geometría de este sea la estructura *a priori* que posibilita al sujeto trascendental a aquirir concocimiento certero, ni que las matemáticas estén por su naturaleza libres de problemas.

Conclusiones

La historia de las geometrías no euclidianas es riquísima en la profundidad de su discurso y en la amplitud de su influencia y son igualmente ricas las conclusiones que podemos extraer de su estudio. A continuación señalaré algunas, las que consideró mejor sustentadas a lo largo del trabajo, aunque evidentemente no son las únicas, y que no son sino un resumen y una síntesis de lo que ya he expuesto.

Primero: el sistema de geometría expuesto en los *Elementos* de Euclides es, sin lugar a dudas, el trabajo matemático más influyente de la historia europea y el descubrimiento de que sus postulados no son necesarios, que el quinto postulado es efectivamente un axioma independiente de los otros cuatro, representa una transición de fase en la historia de la matemática, ya que supone la modificación de un sistema discursivo que incluye la propia visión que la matemática tenía de sí misma. Del mismo modo en que el aristotelismo acompañaba al geocentrismo, la mística pitagórica y el idealismo platónico acompañaban a los *Elementos* de forma casi indistinguible, y con la contribución que la geometría hizo a la conformación de la mecánica aunada al entusiasmo kantiano por los alcances de la razón pura, los autores de las nuevas geometrías luchaban no sólo con las complicaciones técnicas de las demostraciónes en esos nuevos espacios, sino también con un conjunto de preconcepciones que extendían sus dominios hasta esferas tan aparentemente alejadas como la estética, la ética y la política. Efectivamente, las atribuciones divinas que Kepler, Galileo y Newton (cada uno por motivos distintos) otorgaron a la geometría, son una muestra significativa del *status* del sistema axiomático en la Europa de los siglos XVI y XVII. Como consecuencia del "éxito" de la geometría y la mecánica, el conocimiento producido por la filosofía natural moderna tenía un cariz de certeza especial y motivó las investigaciones de Kant en torno a las posibilidades y limitaciones del conocimiento. Según sus propias conclusiones sobre la materia, el conocimiento es el producto de la interacción de elementos que aporta el sujeto, condiciones previas y necesarias *a priori*, y la evidencia empírica del mundo exterior. Para Kant, esas estructuras previas son el tiempo y el espacio y por lo tanto, su estudio por parte de la aritmética y la geometría es el estudio, no de los datos que arroja el mundo, sino de las propias aportaciones del sujeto al acto del conocimiento. Y, a pesar de que estas condiciones son necesarias, el estudio de sus consecuencias es capaz de aportar conocimiento novedoso, según Kant. Esta justificación de la naturaleza certera del conocimiento *científico*, tomando como ejemplo central las ramas de la matemática antes mencionadas, fue muy influyente en Europa y es responsable en gran medida de la imagen que hasta el día de hoy la sociedad tiene del trabajo de la ciencia: la aplicación de las verdades eternas de la matemática a los datos experimentales del mundo para encontrar las verdades eternas del mundo.

Es por todo esto que las geometrías no euclidianas representan una revolución en todos los sentidos de la palabra y por lo tanto, su aparición es un foco de atención en la historia de las ideas. Y aunque esta primera conclusión puede parecer casi irrelevante por lo evidente de la afirmación, me parece importante mencionarla porque en mi propia formación científica, las referencias a este notable acontecimiento histórico fueron vagas y poco frecuentes, y no fue sino hasta que investigué para este trabajo que pude dar a las geometrías no euclidianas su justa dimensión y estuve en condiciones de afirmar condundentemente la relevancia de su aparición. Soy de la opinión de que, a pesar de que sabemos que los supuestos que formaron la visión kantiana de la ciencia son falsos, esa visión sigue palpablemente vigente en amplios sectores, tanto en el público no especializado como entre los propios científicos.

En segundo lugar, existe una larga tradición de matemáticos que se interesaron en el problema de las paralelas y que, de manera lenta y paulatina, fertilizaron el terreno en el que aparecerían las formas alternativas de pensar en las paralelas. Dentro de esa tradición debemos mencionar los comentarios de Proclus, en el siglo VIII, que dan origen a la duda sobre la independencia del quinto postulado; los fallidos intentos de Girólamo Saccheri, que si bien nunca fueron muy populares, e incluso sin tomar en cuenta la introducción de sus famosos cuadrilateros por considerarlos sospechosamente parecidos a los de Omar Khayyam, representan un trabajo invaluable por ser el primer intento profundo de demostración por *reductio ad absurdum*, el camino por el que aparecerán después las nuevas geometrías; y a la enorme lista de importantísimos matemáticos que fallaron intentando demostrar el quinto postulado, entre los que se encuentran Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, Jacobi, y un larguísimo etcétera. En la cima de esa tradición, al margen de las controversias sobre las fechas exactas y las posibles influencias entre unos y otros, podemos reducir las primeras apariciones de geometrías no euclidianas a por lo menos tres fuentes prácticamente independientes en un periodo de tiempo muy corto: Nicolai Lobachevsky, Janos Bolyai y Carl F. Gauss. Y cuando hablamos de la aparición de estas geometrías, debemos pensar en el momento en el que los resultados aparentemente absurdos que se encuentran negando el quinto postulado se reconocen como teoremas de una nueva teoría, aunque la consistencia de ésta es una pregunta que se responde tiempo después.

La tercera conclusión es que con los trabajos de los tres antes mencionados, nuestro entendimiento de qué es *geometría* se ha modificado. Puesto que distintas geometrías son mutuamente consistentes (como lo demostró Beltrami) y consistentes (como lo demostró Hilbert), entonces la geometría termina por dedicarse el estudio formal de distintos sistemas axiomáticos que se refieren a las relaciones de distancia entre puntos de un espacio (como lo habría requerido Riemann). Y es importante aclarar que es sólo hasta que estos trabajos se conocen, que estamos en posibilidad de hablar con todo derecho de que efectivamente son nuevas geometrías. En particular, la propuesta del segundo artículo de Beltrami resula un excelente botón de muestra de una actitud fresca y novedosa respecto de lo que significa hacer matemáticas. La prueba de la consistencia mutua entre las distintas geometrías se basa en la construcción de un modelo de una geometría no euclidiana: usando objetos del sistema euclidiano, que por las relaciones que tienen entre ellos puedan representar objetos de la geometría modelada, podemos probar teoremas de esa geometría dentro de la euclidiana. En ese sentido, la representación plana de una recta paralela puede resultar no ser ni recta, ni paralela en el sentido euclidiano, pero cumplir con las propiedades de ser geodésica o paralela en otra geometría y por lo tanto, ser estudiada como tal. Este resultado muestra cómo la relación platónica y pitagórica entre la naturaleza y la matemática está fracturada y se puede concebir el estudio de objetos matemáticos cuya representación no coincide con nuestra intuición de ellos. Esta percepción más amplia de la matemática resulta novedosa y es uno de los rasgos de modernidad en esta diciplina.

Cuarto: el esclarecimiento de que los axiomas de Euclides no son necesarios y lo que es más, que no representan en ningún sentido ni entidades *a priori* que posibilitan el conocimiento, ni la descripción del espacio físico, es el principio de un periodo de enorme inestabilidad en el ambiente científico de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Como resultado del análisis de sistemas axiomáticos, los de la geometría y la teoría de conjuntos en particular, tenemos un intenso debate sobre los fundamentos de las matemáticas, en el que las nuevas visiones sobre la matemática, que ya referíamos cuando analizamos el trabajo de Beltrami, se sintetizan en al menos tres posturas distintas. Por un lado, la posición representada por Hilbert, conocida como el *formalismo*, y segun la cual cualquier sistema de reglas abstractas tienen derecho a llamarse matemática siempre que tengan alguna forma de probar su consistencia. Por otro, el *intucionismo* que ya vemos en los argumentos de Kronecker en contra de la teoría de los transfinitos y que más tarde se refina y promueve con el trabajo de Brouwer , según el cual sólo debe ser considerado matemático aquel conocimiento que es accesible de manera directa a una *intuición matemática*, finita y limitada. El proyecto de trabajo de los que sostenían esta posición era reconstruir los teoremas matemáticos con pruebas en las que no se use la *reductio ad absurdum* ni argumentos que involucren un número infinito de pasos, como el axioma de elección. Por otra parte, la posición *logicista*, ejemplificada por el esfuerzo de Frege primero, y de Russell y Whitehead posteriormente, según la cual la matemática es una consecuencia de la lógica. La variedad de posturas en torno a esta actividad milenaria enriqueció enormemente el panorama discursivo y transformó de manera definitiva la visión que se tiene del ejercicio matemático: independientemente de que todavía existe polémica sobre su naturaleza, hoy podemos afirmar que ni la consistencia, ni la simplicidad, ni la elegancia, ni la riqueza de sus resultados, ni lo poderosas que puedan ser las pruebas de una teoría se pueden considerar como garantías de su necesidad, ni de su relación con la realidad física en la que vivimos.

Quinto: pero no es sólo la visión de la matemática a su interior lo que cambió. El hueco filosófico que las geometrías no euclidianas representan, pues develan una falla[140] en los cimientos mismos de la teoría kantiana del conocimiento, no pasó desapercibido y se convirtió rápidamente en un problema urgente. El positivismo lógico y en particular la agenda promovida por el Círculo de Viena, inspirada por los trabajos de Russell y Wittgenstein, son un claro intento por responder a la duda sobre la posibilidad de conocimiento científico toda vez que la calidad de conocimiento *a priori* de la geometría y de la aritmética (como demostraría Gödel) había resultado falsa. Este intento, según lo imaginaban sus autores, consistía en asegurarse de que los enunciados con lo que trabajan las teorías siempre se puedan verificar con la evidencia impírica y de que las conexiones lógicas entre ellos esten libres de cualquier interpretación, para de este modo conseguir una ciencia unificada y excenta de metafísica.

Sexto y último punto: la historia de las ideas de Einstein sobre el espacio y el tiempo suele apuntar a elementos internos de la física para explicar las motivaciones y el contexto en el que se desarrollan: comienzan con la relatividad de Galileo, pasan a la teoría electromagnética de Maxwell y al experimento de Michelson y Morley, para llegar por fin a la relatividad especial, una extraña propuesta en la que el espacio y el tiempo dependen de la velocidad del

[140] Puesto que los axiomas de Euclides no son *a priori*, pues no son necesarios.

observador. Sin embargo, es inexplicable la aparición de la versión general de la relatividad sin la existencia de geometrías no euclidianas. La geometría de Euclides sustenta la mecánica de Newton y la aparición de las nuevas geometrías es un requerimiento indiscutible para la teoría de Einstein.

En síntesis: el sistema euclidiano fue tan influyente que el descubrimiento de nuevas geometrías cambió la forma en que se hace geometría, la forma en que entendemos la actividad matemática, la visión que tenemos del concimiento científico y las teorías epistemológicas en general, y nuestro entendimiento del espacio-tiempo en el que vivimos.

Dicho lo anterior, permítanme entonces apuntar algunos elementos que encuentro relevantes y que sólo ahora, una vez concluida la narración, estamos en posibilidad de analizar cabalmente. Son reflexiones al margen de lo académico y que corresponden a inquietudes personales que esta investigación me produjo. Para empezar esta suerte de *Escolio General*, me gustaría dirigir la atención hacia la estrecha relación que a lo largo de todos los siglos que relata este trabajo entre las preocupaciones estríctamente matemáticas y los cuestionamientos más generales de los que se ocupa la filosofía. Desde los tiempos en que la mística pitagórica asociara unívocamente las leyes abstractas de las relaciones de objetos idealizados estudiadas por la matemática con lo Verdadero y lo Bello, hasta la reflexión sobre sus fundamentos en el siglo XX, pasando por la filosofía trascendental de Kant o el positivismo decimonónico, los enunciados y los teoremas generaban sistemas filosóficos completos y las inquietudes y los prejucios establecidos por dichos sistemas filosóficos afectaron de manera significativa la agenda y el punto focal de las matemáticas. Existe una relación de retroalimentación positiva entre estas dos actividades. Reitero que lo estrecho de esta relación no es del todo sorprendente, pues la distinción entre ambas actividades es my reciente, pero no por ello dejo de encontrarla interesante.

En primer lugar, porque la consecuencia de aceptar esta cercanía es que una historia de la matemática que omite estas influencias *externas* es incompleta, carencia que encuentro recurrente en la forma de enseñar estas llamadas *ciencias duras*. El carácter optativo del ejercicio de revisión y reflexión que suponen la historia y la filosofía de la ciencia en los programas de estudios de la institución en la que me formé, por poner un ejemplo, refleja la persistencia de una imagen impermeable del conocimiento científico, misma que se formó durante el siglo XIX y que, si bien permite el rápido desarrollo de técnicos y tecnologías, genera un visión chata, pálida, acartonada y finalmente falsa del quehacer científico, entre los propios científicos.

Una imagen construida en gran medida sobre aquella certidumbre que inspiraba la matemática y que tenía a los *Elementos* como su principal embajador, misma que, después de lo establecido en este trabajo, aparece injustificada. Si para la ciencia la coherencia es un valor central, no debería ser optativo mantenerla bajo estricta vigilancia y asegurarnos de que nuestras creencias y nuestras concepciones sobre ella efectivamente correspondan a la historia de la misma.

En segundo lugar, la encuentro interesante porque muestra que los cambios importantes en la historia de estas ideas siempre vienen acompañados de un cuestionamiento del sentido común de una época, de los presupuestos metafísicos[141], si se quiere, que hasta este momento operaban y por lo tanto revalúa la práctica filosófica como un agente de presión importante para que ocurra el desarrollo de la ciencia que algunos igualan al progreso. Es decir, que la multiplicidad de aparentes coincidencias entre las imágenes del mundo que reflejaban los filósofos en sus escritos y los hallazgos en el mundo abstracto de la matemática, me permiten imaginar que un cambio en la forma misma de representarse el mundo es necesaria para que una revolución científica pueda ocurrir y en consecuencia, el papel de la filosofía de cuestionar los supuestos más básicos y promover visiónes inovadoras toma un papel central en la tarea de conocer nuestra realidad.

Siguiendo con estas cavilaciones finales, volvamos ahora a la pregunta que se planteaba en la introducción: ¿Qué sucedía a principios del siglo XIX que posibilitó la aparición de geometrías no euclidianas en al menos tres trabajos prácticamente independientes y de forma casi simultanea? ¿Qué diferencia existe entre Girólamo Saccheri que considera la hipótesis del ángulo agudo como "repugnante a la naturaleza" y Janos Bolyai quien creía haber "creado un mundo nuevo y diferente, a partir de la nada", tomando en cuenta que entre ambos comentarios hay sólo un siglo de por medio?

Está, sin lugar a dudas, la presión y la inquietud que generan los crecientes recuentos de intentos fallidos por probar el quinto postulado, y que, como Janos mismo reconoce, apuntaban a que se requería una nueva aproximación al problema. Pero me parece un desatino conformarse con este elemento de presión interno de la matemática como principal promotor de las nuevas geometrías. Primero, porque el problema tenía tantos siglos de antigüedad que un siglo de diferencia difícilmente representa mucha más carga de incertidumbre. Y segundo, porque tenemos evidencia de teoremas cuya demostración tardó siglos y que, a pesar de todas las dudas que pudieran sugerir, resultaron teoremas con pruebas conteundentes a pesar de las

141 Aristotélicos, en el caso de la revolución copernicana y platónicos en lo que respecta a la geometría.

dificultades. En matemáticas, al menos en principio, la edad de los problemas no nos dice nada sobre su posible solución. Por eso insisto en que hay un elemento más: la confianza en la Razón. Hay una analogía posible entre la relación de Kepler con las elipses y la diferencia de posturas de Saccheri (quien después de todo estaba construyendo teoremas de geometría no euclidiana sin saberlo) y Bolyai : para el primero, la confianza en los datos precisos por encima de la estética lo lleva a aceptar órbitas no circulares, y la confianza en los alcances de la razón pura por encima de la hegemonía euclidiana llevaron a Janos a aceptar la existencia de geometrías no euclidianas. Y ocurre entonces un singular acontecimiento: la matemática, representante innegable del poder de la razón pura, llevada coherentemente hasta sus límites, termina por destruir el mito que le otorgó ese papel distinguido entre otras áreas del conocimiento. La imagen es muy similar a aquella escalera de Wittgenstein, que una vez servido su propósito debe ser deshechada. Una imagen que aparece contradictoria: la confianza en la razón termina con la certeza que producía esta confianza.

El descubrimiento de que no parecen existir, ni tienen porque existir, entidades epistemológicas, morales, estéticas, etc., que tengan garantizado un lugar privilegiado, un carácter absoluto y que, por lo tanto, tenemos cierta libertad de elegir los criterios de decisión con que vamos por la vida es el descubrimiento que inaugura la posmodernidad.

En la misma dirección apuntan la sentencia laplaciana sobre la carencia de necesidad de Dios para explicar el Universo, la muerte de Dios de Nietzche y una larga tradición de investigación de esta *aporía* de la razón. Una línea de investigación que se encuentra actualmente alejada del trabajo habitual de reflexión sobre la ciencia, y con la que sería muy fructífero establecer vínculos discursivos. De todo el trabajo, me parece que este es el elemento que podría servir como marco teórico de un estudio del movimiento que ocurre a principios del siglo XX, donde la ciencia aparezca inserta en una marea cultural más general. Cuando a mediados del siglo XIX aparece la fotografía, hubo quien imaginó el fin de la pintura, pues su función de retratar con fidelidad la naturaleza estaba garantizada con enormes mejorías por la nueva máquina, pero como ya sabemos, lo que ocurrió fue que la pintura, y el arte en general, se despojó de la necesidad de representar lo cierto y objetivo, y como consecuencia tenemos las vanguardias artísticas. Se me antoja entonces la analogía de que las geometrías no euclidianas son a la ciencia lo que la fotografía es a las vanguardias en el arte: una vez que quedan libres de la obligación de "representar" el mundo externo de forma unívoca, aparece el espacio para la interpretación y la aparición de aproximaciones novedosas a la realidad. Creo que en este sentido hay mucho espacio para una investigación posterior.

Bibliografía

Ayer, A.J., (1971), *Lenguaje, verdad y lógica*, Ediciones Martínez Roca, S.A. España .

Albis, Víctor y Álvarez René,(1983), *Los trabajos de Gauss sobre la teoría de las paralelas,* encontrado en *Gauss, en el bicentenario de su nacimiento*. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, p.p. 1-11.

Bell, Eric, (2010), ¿Paraíso perdido?, contenido en "Los grandes matemáticos", Lozada, Argentina.

Bernal, John D., (1972), *La ciencia en la historia*, UNAM. México.

Bonola, Roberto, (1955), *Non Euclidean Geometry,* Dover, E.E. U.U.

Brumbaugh, R.S., (1981) *The philosophers of Greece*, Albany, N.Y.

Blázquez, J.M., (2001), *La Academia de Atenas como foco de formación humanística para paganos y cristianos. Los casos de Juliano, Basilio y Gregorio Nacianceno,* Gerión No. 19, p.p. 595-628, España.

Kahn,Charles H., (2001) *Pythagoras and the Pythagoreans: a brief history,* Hackett Publishing.

Coughtrey, Darren, (2005) *Immanuel Kant vs. AJ Ayer: A Comparison,* ponencia para "Canadian Undergraduate Mathematics Conference 2005", realizada en Queens University.

Dauben, Joseph, (1995), *Greorg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos,* Temas Investigación y Ciencia, España.

Durán, Antonio, (2001), *La matemática y sus elementos: de Euclides a Bourbaki*. La Gaceta de la RSME, Vol 5.3, págs. 649-672.

Einstein, Albert, (1984), *Sobre la teoría de la Relatividad,* Ed Sarpe, España.

Euclides, (1991), *Elementos*, Bibliotéca Clásica Gredos, España.

Ferreirós, José, (2005), *Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría,* La Gaceta de la RSME, Vol 8.3, págs. 683-712.

Garciadiego, Alejandro,(1996) *Historia de las ideas matemáticas: un manual introductorio de investigación,* Mathesis 12, UNAM, México,pags. 3-113.

Grattan Guiness, Ivor, (1992), *Hacia una biografía de Cantor,* Mathesis 8, UNAM, México,pags. 153-210.

Gray, Jeremy, (2004), *Janos Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space,* MIT Press, E.E.U.U.

Guerrero, Germán (2005), *Teoría kantiana del espacio, geometría y experiencia*, Praxis Filosófica, Nueva serie, No. 20, Enero-Junio 2005, Departamento de Filosofía, Universidad del

Valle.

Hahn, Hans, (1968), *El infinito*, contenido en “Sigma, El mundo de las matemáticas”, compilado por James Newman, Grijalbo, España, vol. 4.

Heidegger, Martin, (2001), *Caminos de bosque*, Alianza Editorial. España.

Horkheimer, Max y Adorno, Theodor, (2005), *Dialéctica de la ilustración*, Ed. Trotta, España.

Iamblichus (1818), *Life of Pythagoras*, traducido al inglés por T. Taylor, London.

Jaeger, Werner, (1990), *Paideia: Los ideales de la cultura griega.*, Fondo de Cultura Económica de España.

Kahn, Charles H., (2001), *Pythagoras and the Pythagoreans: a brief history,* Hackett Publishing, E.E.U.U.

Kant, Immanuel (2006), *Crítica de la razón pura*, Santillana. México

Klein, Morris, (1993) *Los fundamentos de la matemática*, contenido en “El pensamiento matemático, de la antigüedad a nuestros días” vol. 3, Alianza, España.

Koestler, Arthur, (1989), *The Sleepwalkers*, Penguin Books. E.E. U.U.

Kuhn, Thomas,(1980), *La historia de la ciencia*, Conacyt, México.

Kuhn, Thomas, (2006), *La estructura de las revoluciones científicas*, Fondo de Cultura Económica, México.

Marquina, José E., (2006), *La Tradición de Investigación Newtoniana,* Universidad Autónoma Metropolitana, México.

M. Monastyrsky, (1987), *Riemann, Topology and Physics*, Boston-Basel, E.E. U.U.

de Morgan, Augustus, (1872). *A Budget of Paradoxes*, Sophia Elizabeth De Morgan Ed., London.

Newton, Isaac, (1973), *Sir Isaac Newton´s Mathematical Pinciples of Natural Philosophy and his Systems of the World,* University of California Press, E.E. U.U.

Osserman, Robert, (2004), *Janos Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space, Reviewed,* Notices of the AMS, Vol. 52, Num.9, EE.UU.

Proclus, (1970), *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, traducido al inglés por Glenn R. Morrow, Princeton University Press, E.E. U.U.

Russell, (2001), *Autobiography*, Routledge, E.E.U.U.

Russell, (1997), *Principia Mathemática*, Cambridge University Press, E.E.U.U.

Russell, (1996), *An essay on the fondations of geometry*, Routledge, E.E.U.U

Sagan, Carl, (1980), *Cosmos,* España.

Sigarreta, J.M. y Ruesga, Pilar,(2004), *Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica*, Boletín de la asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No.1, Venezuela.

Vega, Luis, (1991), *Introducción General*, incluida en la edición de los *Elementos*, Bibliotéca Clásica Gredos, España.

Villoro, Luis, (2008) *Creer, saber, conocer*, Siglo Veintiuno Editores, México.

Takahashi, Alonso, (2006), *El hechizo de Pitágoras: el discreto encanto de la geometría*, Revista Ideas y Valores No. 131. Colombia.

Trudeu, Richard J., (2001), *The non-euclidean revolution,* Ed. Brikhäuser, E.E. U.U.

Referencias en Internet

(Todos los enlaces fueron cosultados por última ocación el 20 de diciembre de 2009)

Einstein, Albert, (1905), *On the electrodynamics of moving bodies*, Analen der Physic, Alemania, encontrado en ***http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/***
Laercio, Diógenes, *The lives and opinions of eminent philosophers*, en *http://classicpersuasion.org/pw/diogenes/*, las voces que corresponden a Tales, Platón, Aristóteles y Pitágoras.

Marinus of Samaria, *The Life of Proclus or Concerning Happiness* (1925) pp.15-55, en *http://www.tertullian.org/fathers/marinus_01_life_of_proclus.htm*

Russell, Bertrand, (2005), *An essay on the foundations of geometry*, University of Michigan Library, E.E. U.U., que se puede consultar en *http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABR3016*

Hernandez, Luis, (2003), *Sobre los principios fundamentales de la Geometría. Intentos de demostración del quinto postulado*, encontrado en *http://www.xtec.es/~jdomen28/aarticle2.htm*.

Gauss, *Werke*, Volumen VIII, según la traducción al inglés de Stan Burris, en http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/noneucl.pdf.

La biografía de Girolamo Saccheri, en *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Saccheri.html*,

School of Mathematical and Computational Sciences de la University of St Andrews. Consultado en *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/*.

Imagen del libro de Kepler todas de *www.hps.cam.ac.uk/starry/kepler2lrg.jpg y cnx.org/content/m11962/latest/kepler_spheres.gif*.

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, trad. C.K Ogden, edición en línea (en alemán y en inglés), *http://www.kfs.org/~jonathan/witt/tlph.html*